

MODELO MATEMÁTICO DE UN UAS EN CONFIGURACIÓN CANARD
PARA DETERMINAR SU ESTABILIDAD DINÁMICA LONGITUDINAL.

JULIAN DAVID ORJUELA ROMERO
CRISTHIAN FABIAN SUAREZ LOZADA

FUNDACION UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
FACULTAD DE INGENIERIA
INGENIERIA AERONAUTICA
BOGOTA
2014

MODELO MATEMÁTICO DE UN UAS EN CONFIGURACIÓN CANARD
PARA DETERMINAR SU ESTABILIDAD DINÁMICA LONGITUDINAL.

JULIAN DAVID ORJUELA ROMERO
CRISTHIAN FABIAN SUAREZ LOZADA

Proyecto de grado para optar al título de Ingeniero Aeronáutico

Director del proyecto
Ingeniero Aurelio Méndez Moreno

FUNDACION UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
FACULTAD DE INGENIERIA
PROGRAMA DE INGENIERIA AERONAUTICA
BOGOTA, D.C.
2014

Nota de aceptación

Presidente del
jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, Agosto del 2014.

Las directivas de la fundación universitaria los libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente a los autores

AGRADECIMIENTOS

ING. AURELIO MENDEZ, Docente Fundación Universitaria Los Libertadores, por la disposición de sus conocimientos, colaboración y asesoría en el desarrollo del proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

MARCO DE REFERENCIA.....	18
MARCO TEÓRICO.....	18
MARCO LEGAL.....	27
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	28
JUSTIFICACIÓN.....	30
OBJETIVOS.....	31
OBJETIVO GENERAL.....	31
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	31
METODOLOGÍA.....	32
TIPO DE METODOLOGÍA.....	32
ETAPAS DE LA METODOLOGÍA.....	32
1 INTRODUCCIÓN.....	33
1.1 ESTABILIDAD Y CONTROL.....	33
1.1.1 <i>Principios de estabilidad y control.</i>	33
1.2 CONFIGURACIÓN CANARD.....	35
1.3 PRINCIPIOS DE ANÁLISIS DINÁMICO DE AERONAVES.....	39
1.4 MODELOS MATEMÁTICOS ACTUALIDAD.....	42
1.4.1 <i>Modelado Lineal.</i>	42
1.4.2 <i>Modelado Semiempírico.</i>	43
1.4.3 <i>Método de caracterización aerodinámica empírica.</i>	43
1.4.4 <i>Modelo No Lineal.</i>	44
1.4.5 <i>Caracterización aerodinámica.</i>	45
2 MECANICA DE VUELO.....	46
2.1 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.....	48
2.1.1 <i>Convención de signos</i>	51
2.1.2 <i>Sistemas de Coordenadas</i>	51
2.1.2.1 Sistemas de coordenadas Inercial.....	53
2.1.2.2 Sistema de ejes de la tierra.....	53
2.1.2.3 Sistema de ejes del vehículo.....	54
2.1.3 <i>Definición de vectores</i>	56
2.1.4 <i>Derivación de las ecuaciones de movimiento de la mano derecha (RHS).</i>	57
2.1.4.1 Relaciones de fuerza de traslación.....	57
2.1.4.2 Ecuaciones de rotación.....	61
2.1.5 <i>Derivación de las ecuaciones de movimiento de la mano izquierda (LHS).</i>	70
2.1.5.1 Ángulos de Euler.....	71
2.1.5.2 Transformación de las razones angulares.....	76
2.1.5.3 Descomposición inicial de las ecuaciones de la mano izquierda.....	81
2.1.5.4 Fuerzas aerodinámicas y momentos:.....	81
2.1.5.5 Fuerza de Gravedad.....	92

2.1.5.6	Ecuaciones del lado izquierdo (LHS) expandidas	94
2.1.6	<i>Ecuaciones de la mano derecha (RHS) en términos de pequeñas perturbaciones</i>	94
2.1.7	<i>Reducción de las ecuaciones a una forma usable.</i>	96
2.1.7.1	Normalización de las ecuaciones	96
2.1.7.2	Parámetros de Estabilidad	97
2.1.7.3	Simplificación de las Ecuaciones	98
2.1.7.4	Ecuaciones Longitudinales	98
2.1.8	<i>Ecuaciones de movimiento en forma de parámetros de estabilidad.</i>	100
2.2	MOMENTOS DE INERCIA	101
3	LA AERONAVE	106
3.1	DESCRIPCIÓN GENERAL:	106
3.2	AERODINÁMICA:	108
3.3	ESTABILIDAD ESTATICA	110
3.3.1	<i>Definición de estabilidad estática longitudinal.</i>	110
3.3.2	<i>Análisis de la estabilidad estática longitudinal.</i>	111
3.3.3	<i>Ecuación de estabilidad para mando fijo.</i>	112
3.3.4	<i>Contribución de los componentes de la aeronave a la estabilidad.</i>	119
3.3.4.1	Contribución del ala	120
3.3.4.2	Contribución de la cola.	123
3.3.4.3	Contribución del Fuselaje	128
3.3.5	<i>El Punto Neutro (NP).</i>	134
3.3.6	<i>Configuración canard:</i>	137
3.3.6.1	Ecuación de balance:	138
3.3.6.2	Ecuación de estabilidad:	139
3.3.6.3	Contribución de los componentes del canard.	140
3.3.6.4	Cálculo de la estabilidad estática para una aeronave tipo canard:	144
3.4	DERIVADAS DE ESTABILIDAD	148
3.4.1	<i>Derivación de la Ecuaciones de movimiento para las derivadas de estabilidad longitudinal.</i>	154
3.4.1.1	Derivadas con respecto al ángulo de ataque (α).	155
3.4.1.2	Derivadas con respecto a la velocidad (u).	156
3.4.1.3	Derivadas con respecto a la razón de cabeceo (q).	159
3.4.1.4	Derivadas con respecto a la razón de cambio del ángulo de ataque α	164
3.4.2	<i>Cálculos de las derivadas de estabilidad longitudinal</i>	167
3.4.2.1	Cálculos de las derivadas con respecto al ángulo de ataque (α).	167
3.4.2.2	Cálculo de las derivadas con respecto a la velocidad hacia adelante (u).	167
3.4.2.3	Cálculo de las derivadas de estabilidad con respecto a la razón de cabeceo (q).	168
3.4.2.4	Cálculo de las derivadas con respecto a la razón de cambio del ángulo de ataque α	169
3.5	ESTABILIDAD DINAMICA	170
3.5.1	<i>Estabilidad Estática Vs Estabilidad Dinámica.</i>	171
3.5.2	<i>Movimientos Dinámicamente Estables.</i>	171
3.5.3	<i>Movimientos Dinámicamente Inestables.</i>	172
3.5.4	<i>Movimiento Dinámicamente Neutral.</i>	174
3.5.5	<i>SISTEMAS DINAMICOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.</i>	175

3.5.5.1	Sistema de segundo orden con amortiguamiento positivo.	175
3.5.6	<i>Ecuaciones de Movimiento.</i>	178
3.5.7	<i>Movimiento Longitudinal.</i>	182
3.5.8	<i>Modos del Movimiento longitudinal.</i>	182
3.5.8.1	Aproximación Modo Periodo Corto.	183
3.5.8.2	Aproximación Modo fugoide.	185
3.5.8.3	Calculo de las aproximaciones para los modos de periodo corto y fugoide respectivamente:	187
3.5.9	<i>Derivadas de Estabilidad.</i>	192
3.6	FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y POLOS DEL SISTEMA.	194
3.6.1	<i>Amortiguamiento.</i>	201
3.6.2	<i>Desarrollo de las Funciones de transferencia.</i>	206
4	ANÁLISIS DE RESPUESTA	210
4.1	CALIDAD DE VUELO.	213
5	CONCLUSIONES.	219
6	RECOMENDACIONES	220
	BIBLIOGRAFÍA.	221
	ANEXOS	223
	ANEXO A- CÁLCULOS DE ÁREAS Y CUERDAS MEDIAS DEL ALA Y DEL CANARD:	223
	ANEXO B- CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA AERONAVE:	226
	ANEXO C - CALCULO DE DATOS AERODINÁMICOS PARA EL ALA Y CANARD:	227

Lista de Símbolos

ℓ	Longitud de la aeronave.
h	Altura de la aeronave.
S_w	Superficie alar.
S_c	Superficie canard.
\bar{c}	Cuerda media alar.
\bar{c}_c	Cuerda media canard.
b	Envergadura alar.
b_c	Envergadura canard.
AR	Aspect ratio alar.
AR_c	Aspect ratio canard.
Λ	Flechamiento alar.
$\Lambda_{c/4}$	Flechamiento alar a $\bar{c}/4$
Λ_c	Flechamiento canard.
\bar{d}_f	Diámetro promedio del fuselaje.
CG	Centro de gravedad.
ac	Centro aerodinámico alar.
ac_t	Centro aerodinámico de la cola.
ac_c	Centro aerodinámico canard.
x_c	Distancia de ac_c al CG .
x_t	Distancia del ac_t al CG .
x_w	Distancia de ac al CG .
l_c	Distancia de ac_c hasta ac .
I_{yy}	Momento de inercia de la aeronave alrededor del eje y .
α	Angulo de ataque.
g	Fuerza de gravedad.
L	Fuerza de sustentación.
D	Fuerza de arrastre.
\mathcal{W}	Peso de la aeronave.
C_L	Coeficiente de sustentación.
C_D	Coeficiente de arrastre.
C_m	Coeficiente de momento de Cabeceo.
α_0	Angulo de ataque a $C_L = 0$.
$C_{L\alpha_{AFW}}$	Pendiente de la curva C_L con respecto a α del perfil alar.
$C_{L\alpha_{AFc}}$	Pendiente de la curva C_L con respecto a α del perfil canard.
C_{mac}	Coeficiente de momento alrededor del ac .
LD	Relación sustentación arrastre.
C_{L_0}	C_L Con respecto a α_0 .
e	Eficiencia de Oswald.
η_c	Eficiencia canard.

U	Velocidad.
ρ	Densidad del aire.
i_w	Angulo de incidencia del ala.
i_c	Angulo de incidencia del canard.
q	Presión dinámica.
ε	Angulo de upwash o downwash.
$C_{L\alpha_w}$	Pendiente de la curva C_L con respecto a α del ala.
$C_{L\alpha_c}$	Pendiente de la curva C_L con respecto a α del canard.
$d\varepsilon/d\alpha$	Derivada de ε con respecto a α .
V_H	Coeficiente volumétrico del canard.
$C_{m_{0w}}$	C_m Del ala con respecto a $\alpha = 0$.
$C_{m_{0c}}$	C_m Del canard con respecto a $\alpha = 0$.
$C_{m_{0f}}$	C_m Del fuselaje con respecto a $\alpha = 0$.
C_{m_0}	C_m De la aeronave con respecto a $\alpha = 0$.
$C_{m\alpha_w}$	C_m Del ala con respecto a α .
$C_{m\alpha_c}$	C_m Del canard con respecto a α .
$C_{m\alpha_f}$	C_m Del fuselaje con respecto a α .
$C_{m\alpha}$	Variación del C_m de la aeronave con respecto a α .
$C_{D\alpha}$	Variación del C_D de la aeronave con respecto a α .
$C_{L\alpha}$	Variación del C_L de la aeronave con respecto a α .
C_{m_u}	Variación del C_m de la aeronave con respecto a U .
C_{D_u}	Variación del C_D de la aeronave con respecto a U .
C_{L_u}	Variación del C_L de la aeronave con respecto a U .
C_{m_q}	Variación del C_m de la aeronave con respecto a Q .
C_{D_q}	Variación del C_D de la aeronave con respecto a Q .
C_{L_q}	Variación del C_L de la aeronave con respecto a Q .
$C_{m\dot{\alpha}}$	Variación del C_m de la aeronave con respecto a $\dot{\alpha}$.
$C_{D\dot{\alpha}}$	Variación del C_D de la aeronave con respecto a $\dot{\alpha}$.
$C_{L\dot{\alpha}}$	Variación del C_L de la aeronave con respecto a $\dot{\alpha}$.
F	Fuerza.
m	Masa.
a	Aceleración.
M	Momento de Cabeceo.
I	Momento de Inercia.
\bar{F}	Sumatoria de fuerzas externamente aplicadas.
\bar{V}_T	Velocidad Verdadera Lineal.
$\bar{\omega}$	Velocidad Angular.
\bar{G}	Sumatoria de Momentos externamente aplicados.
\bar{H}	Momentum Angular.
U	Velocidad hacia adelante.

V	Velocidad Lateral.
W	Velocidad Vertical.
P	Razón de Alabeo.
Q	Razón de Cabeceo.
R	Razón de Guiñada.
XYZ	Ejes de la tierra.
xyz	Ejes de cuerpo.
β	Angulo de deslizamiento lateral.
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	Vectores unitarios.
\bar{r}	Radio del Momentum angular.
\bar{F}_x	Sumatoria de fuerzas en el eje x .
\bar{F}_y	Sumatoria de fuerzas en el eje y .
\bar{F}_z	Sumatoria de fuerzas en el eje z .
I_x	Momentos de Inercia alrededor del eje x .
I_z	Momentos de Inercia alrededor del eje z .
\bar{G}_x	Sumatoria de momentos en el eje x .
\bar{G}_y	Sumatoria de momentos en el eje y .
\bar{G}_z	Sumatoria de momentos en el eje z .
I_{xy}	Producto de Inercia entre los ejes x, y .
I_{yz}	Producto de Inercia entre los ejes y, z .
I_{xz}	Producto de Inercia entre los ejes x, z .
v	Volumen.
\mathcal{L}	Momento alrededor del eje x .
\mathcal{M}	Momento alrededor del eje y .
\mathcal{N}	Momento alrededor del eje z .
Ψ	Angulo de Euler de Guiñada.
Θ	Angulo de Euler de Cabeceo.
Φ	Angulo Euler de Alabeo.
Re	Numero Reynolds.
M	Numero Mach.
ψ	Angulo de Guiñada.
θ	Angulo de Cabeceo.
ϕ	Angulo de Alabeo.
$F.R.L$	Línea de Referencia del Fuselaje
α_{FRL}	Angulo de ataque respecto a la $F.R.L$.
z_w	Distancia vertical desde el cg al ac .
z_t	Distancia vertical desde el cg al ac_t .
z_c	Distancia vertical desde el cg al ac_c .
l_t	Distancia desde ac al ac_t .
L_w	Sustentación en el Ala.
L_t	Sustentación en la Cola.
L_c	Sustentación en el Canard.
D_w	Arrastre en el Ala

D_t	Arrastre en la Cola.
D_c	Arrastre en el Canard
M_{CG}	Momento de Cabeceo alrededor del cg .
M_{ac}	Momento de Cabeceo del Ala alrededor del ac .
M_{ac_c}	Momento de Cabeceo del canard alrededor del ac_c .
M_{ac_t}	Momento de cabeceo de la Cola alrededor del ac_t .
M_f	Momento de Cabeceo del fuselaje alrededor del cg .
X_{CG}	Distancia desde el borde de ataque del Ala al cg .
Z_{CG}	Distancia vertical desde la $F.R.L$ al cg .
$C_{m_{cgw}}$	Coeficiente de momento de cabeceo del Ala alrededor del cg .
$C_{m_{acw}}$	Coeficiente de momento de cabeceo del Ala alrededor del ac .
C_{Lw}	Coeficiente de Sustentación del Ala.
$C_{m_{cgt}}$	C_m De la cola alrededor del cg .
$C_{m_{0t}}$	C_m De la cola con respecto a $\alpha = 0$.
$C_{m_{\alpha t}}$	C_m De la cola con respecto a α .
$k_2 - k_1$	Factor de corrección para la relación de cuerpos finos.
w_f	Promedio de las secciones del ancho del fuselaje.
C_x	Coeficiente de \bar{F}_x .
C_z	Coeficiente de \bar{F}_z .
C_T	Coeficiente de empuje.
$C_{x\alpha}$	Derivada de C_x con respecto a α .
$C_{z\alpha}$	Derivada de C_z con respecto a α .
C_{xu}	Derivada de C_x con respecto a U .
C_{zu}	Derivada de C_z con respecto a U .
C_{zq}	Derivada de C_z con respecto a Q .
$C_{L_{qw}}$	Variación del C_L del Ala con respecto a Q .
$C_{L_{qt}}$	Variación del C_L de la Cola con respecto a Q .
$C_{m_{qw}}$	Variación del C_m del Ala con respecto a Q .
$C_{m_{qw}}$	Variación del C_m de la Cola con respecto a Q .
$C_{z\dot{\alpha}}$	Derivada de C_z con respecto a $\dot{\alpha}$.
d	Constante de amortiguamiento.
K	Constante del resorte.
s	Transformada de Laplace.
ζ	Razón de Amortiguamiento.
ω_n	Frecuencia Natural.
ω_d	Frecuencia de amortiguamiento.
sp	Modo Período Corto.
p	Modo Fugoide.
k	Ganancia en una función de Transferencia.

Índice de Figuras

<i>Figura 1.1 Wright Flyer, hermanos Wright 1903.</i>	34
<i>Figura 1.2 Bleriot & Antoinette, diseños de configuración convencional por Bleriot y Levavasseur, respectivamente.</i>	35
<i>Figura 1.3 Comparación entre aeronaves de configuración tipo convencional contra aeronaves de configuración tipo canard, respectivamente.</i>	36
<i>Figura 1.4 Hidroavión Fabre, diseñado por Henri Fabre en 1910.</i>	36
<i>Figura 1.5 Aeronaves de configuración Canard a través de la historia.</i>	38
<i>Figura 2.1 Sistema de ejes de la aeronave y su notación.</i>	52
<i>Figura 2.2 Sistema de coordenadas inercial.</i>	52
<i>Figura 2.3 Sistema de ejes de tierra.</i>	53
<i>Figura 2.4 Sistema de ejes de cuerpo.</i>	54
<i>Figura 2.5 Sistema de ejes de estabilidad.</i>	55
<i>Figura 2.6 Velocidad verdadera del sistema de coordenadas de los ejes de tierra y de cuerpo.</i>	58
<i>Figura 2.7 Componentes de velocidad y orientación de los ángulos aerodinámicos, α y β.</i>	59
<i>Figura 2.8 Momentum angular.</i>	62
<i>Figura 2.9 Desarrollo del momentum angular para cuerpos rígidos.</i>	63
<i>Figura 2.10 Momento de inercia (I_y).</i>	66
<i>Figura 2.11 Producto de inercia (I_{xz}).</i>	67
<i>Figura 2.12 Propiedades de inercia de la aeronave con respecto al plano de simetría x-z.</i>	68
<i>Figura 2.13 Rotación de los ángulos de Euler.</i>	71
<i>Figura 2.14 Demostración de que los desplazamientos angulares finitos no se comportan como vectores.</i>	73
<i>Figura 2.15 Componentes de ψ' a lo largo de los ejes x, y y z de cuerpo.</i>	76
<i>Figura 2.16 Velocidad angular de la aeronave con respecto para la razón de guiñada (Rotación ψ').</i>	77
<i>Figura 2.17 Velocidad angular de la aeronave para la razón de guiñada (Rotación θ).</i>	78
<i>Figura 2.18 Velocidad angular de la aeronave para la razón de guiñada (Rotación ϕ).</i>	78
<i>Figura 2.19 Contribución de la razón de cabeceo a la velocidad angular de la aeronave (Rotación θ).</i>	79
<i>Figura 2.20 Contribución de la razón de cabeceo a la velocidad angular de la aeronave (Rotación ϕ).</i>	80
<i>Figura 2.21 Elección del sistema de ejes.</i>	82
<i>Figura 2.22 Origen de los efectos de peso y empuje sobre fuerzas y momentos.</i>	93
<i>Figura 2.23 Montaje para la determinación del momento de inercia sobre el eje Y, por el método del péndulo compuesto.</i>	105
<i>Figura 3.1 Long-Ez, Burt Rutan.</i>	106
<i>Figura 3.2 Long-Ez Velociraptor (Aeromodelo).</i>	107

<i>Figura 3.3 Estabilidad estática en relación a la estática de la aeronave a una ráfaga de viento.</i>	111
<i>Figura 3.4 Momentos de cabeceo de la aeronave.</i>	113
<i>Figura 3.5 Contribución del ala al momento de cabeceo.</i>	121
<i>Figura 3.6 Campo de flujo creado por el ala alrededor de una aeronave.</i>	123
<i>Figura 3.7 Contribución de la cola al momento de cabeceo.</i>	124
<i>Figura 3.8 Angulo de ataque de la cola.</i>	125
<i>Figura 3.9 Calculo de C_{m0} para el fuselaje.</i>	130
<i>Figura 3.10 Calculo de $C_{m\alpha}$ para el fuselaje.</i>	132
<i>Figura 3.11 Relación entre el centro de gravedad y el centro aerodinámico.</i>	134
<i>Figura 3.12 Momento de cabeceo para una aeronave tipo canard.</i>	138
<i>Figura 3.13 Ángulos de ataque para una aeronave tipo canard.</i>	142
<i>Figura 3.14 Fuerzas en vuelo simétrico.</i>	154
<i>Figura 3.15 a) Movimiento con $q = 0$, pero variando α; b) Movimiento con $\alpha = 0$, pero variando q.</i>	160
<i>Figura 3.16 Contribución del empenaje a la razón de cabeceo.</i>	162
<i>Figura 3.17 Analogía al sistema masa-resorte.</i>	175
<i>Figura 3.18 Sistema de segundo orden.</i>	175
<i>Figura 3.19 Sistema de ejes de la estabilidad.</i>	179
<i>Figura 3.20 Modelo de grado de libertad.</i>	184
<i>Figura 3.21 Funcion de transferencia.</i>	194
<i>Figura A-1 Área de un trapecio regular.</i>	223
<i>Figura A-2 Localización de la cuerda media alar.</i>	223
<i>Figura A-3 Localización de la cuerda media del canard.</i>	225

Índice de Graficas.

Grafica 1.1 Coeficientes aerodinámicos con respecto al ángulo de ataque.	44
Grafica 2.1 Aproximación de una función arbitraria por series de Taylor.	89
Grafica 2.2 Aproximación de primer orden por series de Taylor.	89
Grafica 2.3 Aproximación de segundo orden por series de Taylor.	90
Grafica 3.1 Perfil alar NACA 2410.	108
Grafica 3.2 Perfil del Canard NACA 65 ₁ -412.	109
Grafica 3.3 Estabilidad estática.	117
Grafica 3.4 Coeficiente de momento de cabeceo con respecto al ángulo de ataque.	117
Grafica 3.5 Coeficiente de momento de cabeceo con respecto al ángulo de ataque para una aeronave estable.	119
Grafica 3.6 Factor de corrección $k_2 - k_1$	131
Grafica 3.7 Variación del ángulo del flujo local a lo largo del fuselaje.	132
Grafica 3.8 Contribución de los componentes de la aeronave a la estabilidad.	133
Grafica 3.9 Influencia de la posición del centro de gravedad sobre la estabilidad estática longitudinal.	136
Grafica 3.10 Efectos del canard sobre el coeficiente de momento con respecto al coeficiente de sustentación.	140
Grafica 3.11 Estabilidad estática total de la aeronave tipo canard con la contribución de cada uno sus componentes.	147
Grafica 3.12 Decrecimiento exponencial.	172
Grafica 3.13 Oscilación sinusoidal convergente o amortiguada.	172
Grafica 3.14 Incremento exponencial.	173
Grafica 3.15 Oscilación sinusoidal divergente o no amortiguada.	173
Grafica 3.16 Oscilación no amortiguada.	174
Grafica 3.17 a) Plano complejo; b) Respuesta.	177
Grafica 3.18 Respuesta periodo corto con respecto a α (α).	189
Grafica 3.19 Respuesta periodo corto con respecto a la razón de cabeceo (q).	189
Grafica 3.20 Respuesta fugoide con respecto al ángulo de cabeceo (θ).	191
Grafica 3.21 Respuesta fugoide con respecto a la velocidad (u).	191
Grafica 3.22 Diagrama de Polos.	195
Grafica 3.23 Polo 1.	196
Grafica 3.24 Pareja de Polos 2.	197
Grafica 3.25 Pareja de Polos 3.	198
Grafica 3.26 Pareja de Polos 4.	198
Grafica 3.27 Pareja de Polos 5.	199
Grafica 3.28 Polo 6.	200
Grafica 3.29 Movimiento sobreamortiguado con factores de amortiguamiento 1.5, 4 y 8.	202
Grafica 3.30 Movimiento crítico.	203
Grafica 3.31 Movimiento no amortiguado.	204
Grafica 3.32 Movimiento subamortiguado para una entrada impulso.	205
Grafica 3.33 Modo periodo corto.	208
Grafica 3.34 Modo fugoide.	209

<i>Grafica 4.1 Relación tiempo a media o doble amplitud con respecto al periodo.</i>	<i>211</i>
<i>Grafica 4.2 Influencia del área del estabilizador sobre el plano longitudinal.</i>	<i>214</i>
<i>Grafica C-0.1 Pendiente del coeficiente de sustentación con respecto al ángulo de ataque. ..</i>	<i>227</i>
<i>Grafica C-0.2 Relación área húmeda con respecto al área de referencia.</i>	<i>229</i>
<i>Grafica C-0.3 Máxima relación sustentación arrastre.....</i>	<i>230</i>
<i>Grafica C-0.4 Factor de corrección de amortiguamiento de la contribución del ala a C_{mq}</i>	<i>232</i>
<i>Grafica C-0.5 Coeficiente de sustentación VS Angulo de ataque, perfil NACA 65₁-412.....</i>	<i>233</i>
<i>Grafica C-0.6 Coeficiente de momento VS Angulo de ataque, perfil NACA 65₁-412.</i>	<i>234</i>
<i>Grafica C-0.7 Coeficiente de sustentación VS Angulo de ataque, perfil NACA 2410.</i>	<i>235</i>
<i>Grafica C-0.8 Coeficiente de momento VS Angulo de ataque, perfil NACA 2410.</i>	<i>236</i>

Índice de Tablas.

<i>Tabla 2-1 Descomposición inicial de las ecuaciones de la mano izquierda</i>	<i>81</i>
<i>Tabla 2-2 Lista de variables.....</i>	<i>85</i>
<i>Tabla 2-3 Factores de normalización.</i>	<i>97</i>
<i>Tabla 3-1 Descripción geométrica de la aeronave.</i>	<i>107</i>
<i>Tabla 3-2 Condiciones de vuelo para las aeronaves.....</i>	<i>108</i>
<i>Tabla 3-3 Datos de los perfiles aerodinámicos.....</i>	<i>109</i>
<i>Tabla 3-4 Cálculos aerodinámicos.....</i>	<i>110</i>
<i>Tabla 3-5 Factores de compensación.</i>	<i>151</i>
<i>Tabla 3-6 Coeficientes de derivadas de estabilidad.</i>	<i>166</i>
<i>Tabla 3-7 Cálculos de los coeficientes de las derivadas de estabilidad.</i>	<i>170</i>
<i>Tabla 3-8 Amplitudes y ángulos de fase para el modo de periodo corto.</i>	<i>188</i>
<i>Tabla 3-9 Amplitudes y ángulos de fase para el modo fugoide.</i>	<i>190</i>
<i>Tabla 4-1 Niveles de la calidad de vuelo.</i>	<i>215</i>
<i>Tabla 4-2 Categorías de fases de vuelo.....</i>	<i>216</i>
<i>Tabla 4-3 Clasificación de las aeronaves.</i>	<i>216</i>
<i>Tabla 4-4 Calidad de vuelo para el movimiento longitudinal para ambos modos.</i>	<i>217</i>

Marco de referencia.

Marco Teórico.

El UAV (*Unmanned Aerial Vehicles*), se considera una aeronave autónoma por tener la capacidad para volar sin que se requiera apoyo de un tripulante. La aeronave puede ser controlada por un sistema de control automático a bordo, el cual tiene la capacidad de tomar decisiones autónomas en su misión de vuelo o a través del uso de un radio control para el mando del UAV de forma manual en lo que se conoce como estaciones de control en tierra.¹

En estas aeronaves, es necesario emplear diferentes sensores como GPS (*Global Position System*), INS (*Inertial Navigation System*), medidores anemométricos, entre otros, que son de vital apoyo para la navegación autónoma de la aeronave, sin importar el tipo de misión al cual se le fue asignado.¹

Este tipo de aeronaves debido a su tamaño, su agilidad en vuelo, su fácil adaptación a diferentes tipos de entornos y su bajo costo de fabricación y mantenimiento en comparación a una aeronave tripulada, lo han convertido en una herramienta esencial para la ejecución de diferentes tareas a nivel civil y militar.²

Aplicación civil:

- ❖ Videos y fotografía aérea.
- ❖ En la agricultura, la vigilancia de los cultivos y la pulverización; la vigilancia de los rebaños y de conducción.
- ❖ En la guarda costera, búsqueda y rescate.
- ❖ En la conservación del medio ambiente, monitoreo de contaminación y de suelos.
- ❖ En compañías eléctricas, inspecciones de cables eléctricos.
- ❖ Servicio de bomberos y forestal, detección de fuego y control de incidentes.

¹**BARRAGÁN, Juan Miguel.** "Identificación de UAVs de ala fija y rotatoria", *Proyecto fin de carrera*. Sevilla, España: Universidad de Sevilla, 2011.

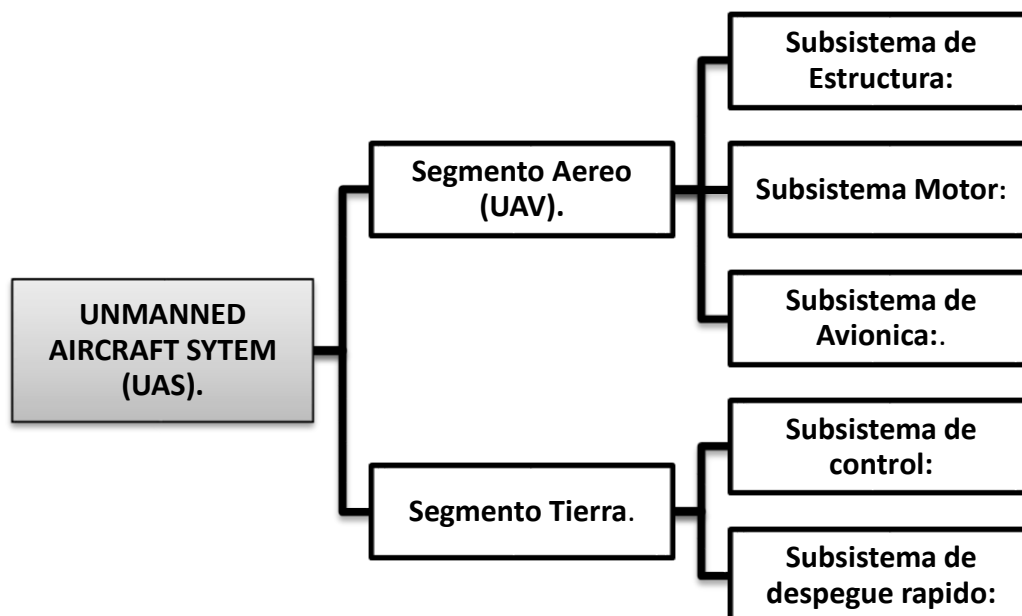
- ❖ En la pesca, detección de bancos pesqueros y protección de buques.
- ❖ Servicios meteorológicos; toma de muestras y análisis de la atmosfera, entre otros.

Aplicación militar:

- ❖ Detección de flotas enemigas.
- ❖ Reconocimiento de blancos y adquisición de objetivos.
- ❖ Vigilancia de la actividad enemiga.
- ❖ Monitoreo nuclear.
- ❖ Contaminación química o biológica.
- ❖ Localización y destrucción de minas en tierra.
- ❖ Eliminación de bombas sin estallar, entre otros.

Los sistemas denominados UAV, han pasado a mencionarse como UAS (*Unmanned Aircraft System*, en español, Sistema de Aeronave No tripulado), para resaltar el hecho de que se estima a la aeronave y a la estación en tierra como un mismo sistema, en donde solo la aeronave se considera como un subsistema de este.²

El UAS podría definirse genéricamente como un sistema constituido por un segmento aéreo y un segmento terreno o en tierra:



- Segmento aéreo: Hace referencia a los subsistemas vitales que contiene la aeronave para su vuelo, como lo son:
 - Subsistema de estructura: Además de proteger los diferentes subsistemas que allí se integran, es aquí donde se define la configuración de las alas y del estabilizador vertical y horizontal del UAV.
 - Subsistema motor: Es la planta motriz con la que cuenta la aeronave y es el generador de empuje requerido que este necesita para realizar dicha misión.
 - Subsistema de aviónica: Es donde se contiene toda la parte electrónica, enlace de datos necesarios para el control de vuelo, de navegación y de comunicación de la aeronave.
- Segmento terreno o de tierra: Hace referencia a subsistemas instalados en tierra para control de la aeronave y mecanismos de despegue:
 - Subsistema de control en tierra: Son estaciones de fácil transporte que permiten la comunicación, el mando, y el registro de la toma de datos de la aeronave.
 - Subsistema de despegue rápido: Son mecanismos utilizados para un despegue rápido y seguro de la aeronave como catapultas, hidráulicas, cohete, entre otros.^{1,2}

Para el caso del desarrollo de este proyecto de grado, tomaremos en cuenta el segmento aéreo, los subsistemas de aviónica y de estructura; en el subsistema de aviónica se analizara teóricamente el control automático y en el subsistema de estructura de igual manera se analizara teóricamente la configuración estructural de la aeronave.

Con respecto a la capacidad de autonomía de un UAV o cualquier otro tipo de aeronaves, hacemos referencia a un control automático de vuelo

²**AUSTIN, Reg.:** *Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment*. First edition, John Wiley & Sons Ltd. United Kingdom, 2010. ISBN 978-0-470-05819-0.

(AFC, *Automatic Flight Control*), en donde inicia con el concepto de sistema de control de vuelo (FCS, *Flight Control System*), el cual principalmente fue un modelo mecánico que a través de cables y poleas, accionan las superficies de control de una aeronave.

Sin embargo, el desarrollo tecnológico realizado al FCS, transformo el modelo inicial a un modelo eléctrico denominado *fly-by-wire* (vuelo por cables).

Existen varias razones para continuar con el mejoramiento del AFC. Primero que todo, una computadora tiene mucha mayor velocidad de reacción que la de un tripulante. Por otro lado, una computadora no tiene perdida de concentración, fatiga y esta puede tener mejor conocimiento sobre el estado de la aeronave en vuelo. Esto nos lleva a que en un futuro, para el control de las aeronaves, no se requiera del apoyo de un tripulante, sino que se ejecute a través de una computadora que al mismo tiempo posea autonomía en la toma de decisiones ante posibles incidentes y/o agentes externos.³

Para comprender el debido funcionamiento del AFC, un punto clave para ello es la definición de un modelo matemático que se asemeje en lo posible a la realidad en un amplio rango de operación, y mientras más amplio sea su rango de operación, más optimizado es el AFC, permitiendo realizar maniobras complejas o con riesgo sin que haya pérdida del control.

“En la actualidad cada vez más el trabajo de un ingeniero consiste en la realización de môdelos matemáticos de los procesos estudiados” [LJUNG 1994].⁴

La cita anteriormente indicada, para estudios acerca de modelados matemáticos, es necesario argumentar sobre el modelado de un sistema dinámico, que consiste en la obtención de un conjunto de ecuaciones matemáticas que describan el comportamiento de un sistema físico

³**AUTOMATIC FLIGHT CONTROL SUMMARY, [virtual],**
<http://aerostudents.com/files/automaticFlightControl/automaticFlightControlFullVersion.pdf>.

⁴**INTRODUCCIÓN DE LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS [virtual],**
<http://pis.unicauca.edu.co/moodle-2.1.2/pluginfile.php/.../temas.pdf?>

teniendo en cuenta las variables asociadas (variables de estado). Existen tres tipos de aplicación de un sistema dinámico:⁵

- Sistemas eléctricos y electrónicos.
- Sistema de fluidos y térmicos (Hidráulica).
- Sistemas mecánicos.⁵

Para el análisis de un controlador de vuelo, teniendo en cuenta el desarrollo para este trabajo de grado, el sistema físico es el UAV, y se desea conocer su comportamiento en la dinámica longitudinal del mismo, el mencionado sistema se establece como un sistema mecánico, debido a que es la mecánica la cual describe fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos donde hallaremos variables descriptivas como lo son la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo. La ley fundamental de la mecánica clásica y también la más utilizada para el modelado de sistemas es la segunda ley de Newton.

En primera instancia para el proceso de análisis de un sistema físico consiste en deducir un modelo matemático a partir del cual puedan estudiarse las características del sistema, el UAV, y se desea que este modelo represente fielmente la dinámica de este mismo, para así realizar un control eficiente. Se considera el modelo como un método para representar las relaciones entre los componentes del sistema y la teoría.

6

Una herramienta para hallar el modelo matemático es a través de la técnica de identificación del modelo, el cual consiste en construir este modelo a partir de la información disponible del sistema. La identificación del modelo a partir de datos, es un método muy utilizado debido a que es muy difícil tener en consideración todas las interacciones y fenómenos físicos presentes en estos sistemas.⁴

Para el desarrollo de dicho modelo matemático se debe tener en cuenta conocimientos acerca de la dinámica de vuelo de las aeronaves, en

⁵**GARCIA, Luis, PEREZ, Carlos**, *Modelado de Sistema Dinámicos: Aplicaciones*. España: Universidad Politécnica de Valencia, Universidad Miguel Hernández, Editorial Club Universitario, ISBN 84-8454-422-2.

donde allí encontraremos las ecuaciones que rigen el sistema, para este caso como es un sistema mecánico, se aplican las ecuaciones de movimiento de fuerza y torque que actúan en el UAV, basándonos en la segunda ley de Newton.¹

Es importante recordar que todos los sistemas físicos son en algunos aspectos no lineales, por lo tanto es necesario linealizar las ecuaciones de movimiento mediante las series de Taylor.⁶

Como se ha referido, es necesario para el análisis de un controlador el desarrollo de un modelo matemático del UAV, el cual se divide en cuatro tipos de modelos:

- Modelo másico – geométrico: También modelo inercial, es el que define la geometría del avión, la masa total, el centro de gravedad. Esto da lugar a la estimación de las fuerzas y momentos inerciales del avión.
- Modelo gravitatorio: como su nombre lo define es el uso de la fuerza de gravedad que actúa sobre el avión (Vector peso).
- Modelo aerodinámico: se relaciona con el desarrollo de modelos matemáticos que describen las fuerzas aerodinámicas y momentos actuando sobre la estructura de la aeronave.⁷
- Modelo propulsivo: son fuerzas y momentos sobre el avión a partir del vector empuje.⁸

Para el trabajo de grado, se emplearán los tres primeros modelos (masico-geometrico, gravitatorio y aerodinámico), teniendo en cuenta

⁶**MARTINEZ, Boris, PINEDA, Luis, MARTINEZ, Miguel, AVILA, Diamir, HERNANDEZ, Luis.** “Identificación de un vehículo aéreo no tripulado”, *Revista de ingeniería electrónica, automática y comunicaciones*. Santa Clara, Cuba: Universidad Central de Las Villas. 2012. ISSN: 1815-5928

⁷**COOK, Michael.** *Flight Dynamics Principles, Second ed.*, ed. ELSEIVER Ltda. Oxford, United Kingdom. 2007

⁸**PLAZA ALONSO, Elías.** “Desarrollo de estrategias de control avanzado para vehículos aéreos no tripulados”, *proyecto fin de carrera*. Sevilla, España: Universidad de Sevilla. 2011.

que nuestro objetivo inicial es determinar la estabilidad dinámica longitudinal de un UAV con configuración canard, se hará un estudio más enfocado al modelo aerodinámico, el cual son el cálculo de las derivadas de estabilidad que describen las características de fuerzas y momentos aerodinámicos.

Las derivadas de estabilidad se pueden calcular por métodos analíticos, semi-empíricos, dinámica de fluidos computacional (CFD) o experimental.⁹ Se desarrollará el cálculo por método analítico, como se ha mencionado a lo largo del proyecto, y cabe aclarar que tipos de derivadas de estabilidad se estimarán:

1. Derivadas con respecto al ángulo de ataque:
 - 1.1. Variación del coeficiente de resistencia con respecto al ángulo de ataque. $[C_{D_\alpha}]$
 - 1.2. Variación del coeficiente de sustentación con respecto al ángulo de ataque. $[C_{L_\alpha}]$
 - 1.3. Variación del coeficiente de momento de cabeceo con respecto al ángulo de ataque. $[C_{m_\alpha}]$
2. Derivadas con respecto a la velocidad:
 - 2.1. Variación del coeficiente de resistencia con respecto a la velocidad. $[C_{D_u}]$
 - 2.2. Variación del coeficiente de sustentación con respecto a la velocidad. $[C_{L_u}]$
 - 2.3. Variación del coeficiente de momento de cabeceo con respecto a la velocidad. $[C_{m_u}]$
3. Derivadas con respecto a la razón de cabeceo:

⁹**PAMADI, B.N.:** *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes*. Second ed., ed. V. Reston, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston VA, 2004.

- 3.1. Variación del coeficiente de resistencia con respecto a la razón de cabeceo. [C_{D_q}]
 - 3.2. Variación del coeficiente de sustentación con respecto a la razón de cabeceo. [C_{L_q}]
 - 3.3. Variación del coeficiente de momento de cabeceo con respecto a la razón de cabeceo. [C_{m_q}]
4. Derivadas con respecto a la razón del ángulo de ataque:
- 4.1. Variación del coeficiente de resistencia con respecto a la razón del ángulo de ataque. [$C_{D_{\dot{\alpha}}}$]
 - 4.2. Variación del coeficiente de sustentación con respecto a la razón del ángulo de ataque. [$C_{L_{\dot{\alpha}}}$]
 - 4.3. Variación del coeficiente de momento de cabeceo con respecto a la razón del ángulo de ataque. [$C_{m_{\dot{\alpha}}}$].

10

Por otro lado, con relación a la configuración estructural del UAV, se utilizara un tipo de configuración canard o *forward tail* (cola adelante), que ubica al estabilizador horizontal por delante de las alas, ocasionando que el centro de masas de la aeronave se ubique por delante de las alas y el balance es logrado con la generación de sustentación positiva producido por el canard, ayudando a la estabilidad longitudinal de la aeronave.

Una ventaja de esta configuración, es la generación de sustentación positiva por los dos planos horizontales canard, por lo cual, este es mucho más eficiente en términos aerodinámicos que una configuración normal (*tailaft* o cola atrás). Otra de sus ventajas es tal que, como los planos canard manejan ángulos de incidencia mayores que el de las alas, el canard entra en pérdida antes que las alas; Esto da como resultado una pequeña pérdida de ascenso de la nariz de la aeronave, y el

¹⁰**ROSKAM, JAN.:** *Methods for estimating stability and control derivatives of conventional subsonic airplanes.* Lawrence, Kansas, EE.UU: University of Kansas. 1971.

movimiento de recuperación produce una pequeña pérdida con respecto a la altura de vuelo, en comparación con un *tail-aft* donde la aeronave para recuperar su estabilidad tarda más y produce más pérdida de altura de vuelo. Una desventaja de esta configuración, es que se tiene menos estabilidad direccional.²

El sistema propulsivo, generalmente para este tipo de configuración canard, se encuentra ubicado en la parte posterior de la aeronave, ya sea un motor turbo jet o un motor de hélice, un ejemplo de ello es el *Eurofighter Typhoon* por *Eurofighter GmbH* el *Long-EZ* por *Burt Rutan Factory*.

Este último modelo de canard, *Long-EZ*, será el modelo base para el desarrollo de este proyecto, obviamente haciendo uso de este a una escala de aeromodelo.

Marco Legal.

La introducción de aeronaves no tripuladas en los cielos a nivel global, es uno de los mayores inconvenientes entre la comunidad de la aviación y el público en general, en cuanto a la gran probabilidad que existe de causar lesiones a personas o daños a propiedades tanto en el aire como en tierra. Por consiguiente, las autoridades reguladoras, principalmente la ICAO (*International Civil Aviation Organization*), han establecido normatividades para el control y monitoreo de fabricación y operación de UAS.²

Estas normatividades son divididas con respecto a su actividad, militar o civil, las cuales son ejercidas por diferentes entidades, por ejemplo, en Colombia la autoridad civil aeronáutica es conocida como la UAEAC (Unidad Administrativa Especial de la Aeronáutica Civil) y por parte de la autoridad militar es la FAC (Fuerza Aérea Colombiana).

Para las regulaciones civiles, actualmente la UAEAC en el RAC parte cuarta (Normas de aeronavegabilidad y operación de aeronaves) capítulo XXV (Aviación deportiva) numeral 4.25.8.2 (Otras operaciones), reglamenta la operación de equipos de vuelo con fines no deportivos con limitaciones asociadas a aeromodelos, sin embargo en este reglamento no se considera por hoy la certificación, operación y mantenimiento de UAS.¹¹

En el caso de las normativas militares, la FAC como entidad de defensa del espacio aéreo colombiano, en cuanto a la investigación y desarrollo de UAS establecen sus propias normatividades, es decir se autorregulan.

Debido a que no existe un reglamento que certifique la fabricación, diseño y la operación de UAS, la UAEAC en conjunto con la FAC, acordaron el 28 de Febrero del 2012, la realización de un proyecto de certificación para este tipo de aeronaves, el cual hoy en día se encuentra en proceso de desarrollo.

¹¹**UNIDAD ADMINISTRATIVA ESPECIAL DE LA AERONÁUTICA CIVIL (UAEAC),**
“Proyecto certificación de sistemas de aeronaves no tripuladas (UAS)”. Bogotá,
Colombia. 2012. 510210912-2012006480.

Planteamiento del problema.

En 1903 con el Flyer, los hermanos Wrigth, realizaron el primer vuelo controlado y potenciado de una aeronave de ala fija con configuración canard, desde entonces, la industria en el sector aeronáutico con poco más de un siglo de trabajos experimentales e investigativos, se ha logrado obtener desde diferentes diseños de configuración geométricas de una aeronave de ala fija, hasta lograr desarrollar equipos con la capacidad de realizar vuelos con controladores automáticos aplicado tanto aeronaves con tripulación como sin tripulación (UAS).

En el espacio aéreo a nivel global, se ha generado un gran aumento de aeronaves, ya sean tripuladas o no tripuladas, entre aeronaves civiles, militares y UAS. En Colombia, la fabricación y operación de UAS ha tenido un crecimiento notable, aunque legalmente frente a la autoridad aeronáutica que aquí rige (UAEAC), mencionando de ante mano que cualquier tipo de aeronave no tripulada y radio controlada se considera un aeromodelo, no existe ningún impedimento para la operación de UAS en el espacio aéreo siempre y cuando se respeten las limitaciones allí contenidas (RAC 4.25.8 *Aeromodelismo*).

Sin embargo, independientemente de la inclusión de UAS en el espacio aéreo colombiano, aplicado a diferentes áreas en las que este opera, su campo investigativo en cuanto a bases de diseño de controladores de vuelo para su sistema de aviónica es muy reducido, debido a la complejidad que este demanda.

Para llevar a cabo este proyecto, se debe realizar un estudio investigativo referente los sub-sistemas de aviónica y de estructura de un UAS previamente seleccionado, la cual, dicha investigación abarcara temas referentes a la dinámica de vuelo y configuración geométrica de una aeronave no convencional (configuración tipo canard, alas en tándem, a las unidas, entre otros) que son de gran importancia para el estudio y análisis del comportamiento dinámico de una aeronave, problemas relacionados con el diseño de sistemas de control de vuelo y desarrollo de diferentes tipos de configuración de aeronaves.

De esta manera se determinó que es necesario, para fines personales y de la nación, contribuir en el desarrollo de nuevas líneas de investigación aplicadas a la industria aeronáutica en Colombia, mediante un proyecto

que utilice los conceptos de dinámica de vuelo en una aeronave de configuración tipo canard y emplearlos en un modelo a escala o UAS, para la identificación y el análisis de la dinámica longitudinal de este mismo.

La falta de este tipo de investigaciones, compromete el desarrollo de la aviación para la nación, y dilata el proceso de llegar a obtener nuevas tecnologías que mejoren la capacidad de autonomía de una aeronave en vuelo y la aplicabilidad de estas a distintas configuraciones estructurales en una aeronave.

Justificación.

Actualmente investigaciones y avances llevadas a cabo entorno a los llamados UAS, muestran que pueden ser de gran utilidad tanto en el campo civil como en el campo militar.

El desarrollo de la aviación no tripulada ha contribuido en el impulso o motivación a muchas de las claves de innovación en aviación como lo son el piloto automático, el sistema de navegación inercial y los enlaces de datos

Debido a lo anterior una aplicación, que es la que se propone este trabajo, es dentro de la robótica aérea. Teniendo en cuenta que el modelo matemático constituye el centro neurálgico de la aeronave, el cual es el órgano que dicta su comportamiento y evolución durante una fase de vuelo. Por lo tanto es de vital importancia en cuanto al diseño y análisis de controladores de vuelo o pilotos automáticos para cualquier tipo de aeronave, en nuestro caso un UAS, puesto que estos tipos de sistemas necesitan para su diseño y su óptimo funcionamiento conocer el comportamiento y las características de vuelo de dicha aeronave, de esta manera como se ha mencionado en el marco teórico, el procedimiento adecuado para realizar este tipo de análisis es mediante el modelado de sistemas dinámicos, lo cual nos permite utilizar un modelo matemático como metodología para estudiar un fenómeno físico que nos ayude a comprender las características del sistema a analizar, sin recurrir a la experimentación del mismo.

Este proyecto establece las bases para el diseño de los sistemas de estabilidad, control automático y de navegación que le proporcione a la aeronave el título de vehículo aéreo autónomo.

Para el desarrollo de un artefacto de esta naturaleza, es decir que pueda mantenerse en vuelo autorregulado y permitir el cumplimiento exitoso de una determinada misión, se requiere de un trabajo interdisciplinario y debe ser de mucho interés para la comunidad científica por todas sus implicaciones tecnológicas, científicas y humanas.

Objetivos.

Objetivo General.

- Determinar la estabilidad dinámica longitudinal de un UAS en configuración canard.

Objetivos Específicos.

- Desarrollar el modelo matemático del movimiento longitudinal del UAS a partir de las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento físico del sistema.
- Calcular las derivadas de la estabilidad longitudinal mediante un método analítico y obtener las funciones de transferencia del UAS.
- Realizar las gráficas de la respuesta dinámica longitudinal del UAS.

Metodología.

Tipo de Metodología.

La investigación se realizara por medio de un estudio descriptivo, por el cual mediante conceptos en matemáticas, papers, disertaciones y diferentes textos, se tomara la información útil y necesaria, para luego aplicar lo investigado al UAS y así identificar sus características de vuelo para poder determinar la estabilidad dinámica longitudinal del mismo. Mediante los conceptos matemáticos se identificaran las variables cuantitativas que permitirán el desarrollo del proyecto.

Etapas de la Metodología.

Pasos a seguir para determinar la estabilidad dinámica longitudinal:

- Repaso de conceptos matemáticos en Álgebra lineal y Ecuaciones Diferenciales.
- Realizar la revisión bibliográfica pertinente de temas concernientes a modelado de sistemas dinámicos y dinámica de vuelo.
- Identificar el tipo de sistema a analizar.
- Interpretación de la información útil para la identificación.
- Análisis de la aerodinámica de un UAV tipo canard.
- Contextualizar y sintetizar ideas obtenidas de la revisión bibliográfica para aplicarlas al desarrollo del proyecto.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Estabilidad y control.

Es bien sabido que el vuelo y el direccionamiento de una aeronave, en aeronáutica, son temas que se relacionan directamente con estabilidad y control. Estabilidad es la facultad que tiene cierta aeronave para retornar a su posición de equilibrio después de una perturbación que pueden ser generadas por el piloto por medio de la actuación de las superficies de control o por fenómenos atmosféricos tales como ráfagas de viento, por gradientes de viento o turbulencias en el aire. Una aeronave debe tener la suficiente estabilidad para que un piloto no llegue a fatigarse con el constante accionamiento de las superficies de control y así mismo, tener la capacidad de dar una respuesta natural a diferentes fenómenos atmosféricos en vuelo.

Existen dos condiciones de vuelo que son necesarias para una aeronave en vuelo, independientemente de la misión que este valla a realizar: (1) la aeronave debe ser apta para lograr un equilibrio en vuelo; (2) la aeronave debe tener la capacidad de maniobrar para un amplio rango de velocidad y altitudes en vuelo.

Las características de estabilidad y control en una aeronave son referidas al manejo del vehículo o a las cualidades de vuelo. Las aeronaves con una pobre cualidad de manejo de vuelo son difíciles de volar y pueden ser potencialmente peligrosas. Para mejorar la aptitud de manejo en vuelo, incrementar la capacidad de maniobrabilidad y alcanzar un vuelo estable, se emplean sistemas de control electrónicos que ayudan a que las aeronaves adquieran una estabilidad y control óptima.

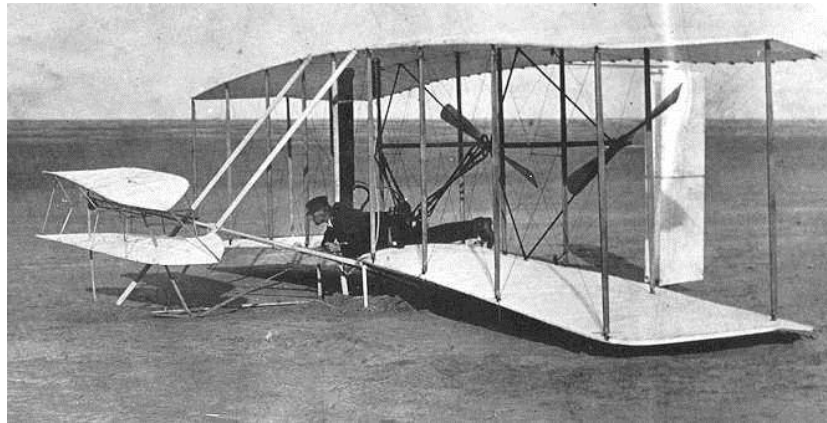
1.1.1 Principios de estabilidad y control.

A finales del siglo XIX, se quería lograr que una aeronave pudiera obtener un vuelo durante un periodo de tiempo considerable y al mismo tiempo que este mismo pudiera ser dirigido en el aire, a lo anterior se le conoce como problema de estabilidad y control, en donde varios diseñadores no llegaron a una conclusión para la solución de estos problemas y en algunos casos llegándose a cobrar la vida de ellos mismos (Otto Lilienthal, Langlay, George Caylay, H. Maxim, Alphonse Penaud, etc.), las cuales, sus metodologías de trabajo no llegaron a tener un argumento

teórico si no se desarrollaron de una manera empírica y demostrado con pocas pruebas de vuelo los logros alcanzados.¹²

A comienzos del siglo XX, a nivel mundial se fundaron instituciones aeronáuticas y aeroespaciales en pro de formalizar el campo de la aviación desarrollando teorías que lo fundamentaran y tratar de dar soluciones a investigaciones inconclusas como el de la sustentación y el control de una aeronave en vuelo. De igual manera, paralelo a este periodo, aun se buscaba resolver estas dificultades utilizando métodos experimentales, como lo fue el caso de los hermanos Wright, que lograron el 17 de Diciembre de 1903 con el *Wright Flyer*, una aeronave con motor, biplano y de configuración canard (superficies de control hacia adelante), el primer vuelo de una aeronave con la capacidad de ser controlado y de tener un planeo prolongado, con un registro de 260 metros en 59 segundos. Para el año de 1908, dos vuelos más demostraron el perfecto control mecánico en vuelo que habían desarrollado en su prototipo, estos vuelos se realizaron en Estados Unidos por Orville Wright y en Francia por Wilbur Wright, frente a la comunidad aeronáutica de ese entonces.

Figura1.1 Wright Flyer, hermanos Wright 1903.

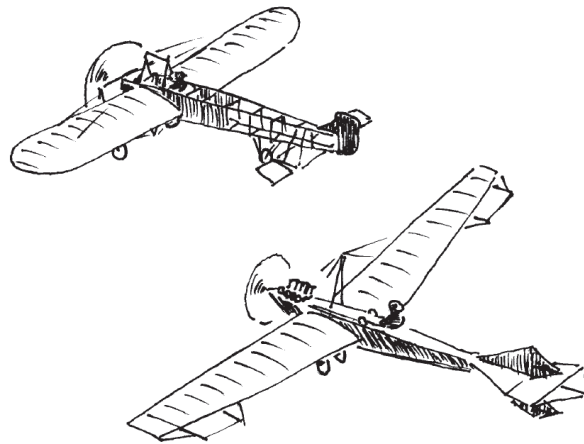


Fuente:http://www.wrightbrothers.org/Information_Desk/Help_with_Homework/Wright_Photos/Wright_Photos.htm

¹²**ABZUG, Malcolm J.; LARRABEE, E. Eugene.** *Airplane stability and control: a history of the technologies that made aviation possible.* Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-80992-4.

Posterior a los hermanos Wight, Bleriot y Levavasseur, diseñadores del Bleriot y del Antoinette, respectivamente, pioneros en la construcción de monoplanos con ángulo diedro alar y superficies de control en cola. Estos dos tipos de aeronaves obtuvieron una mayor cantidad de sustentación en comparación que el de los hermanos Wright, obteniendo una velocidad superior, el cual fue factor influyente en la estabilidad de las aeronaves. En efecto, las configuraciones de ala, de superficies de control y demás tanto del Bleriot como del Antoinette, fueron los modelos a seguir en la fabricación de aeronaves para la primera guerra mundial.¹

Figura 1.2 Bleriot & Antoinette, diseños de configuración convencional por Bleriot y Levavasseur, respectivamente.

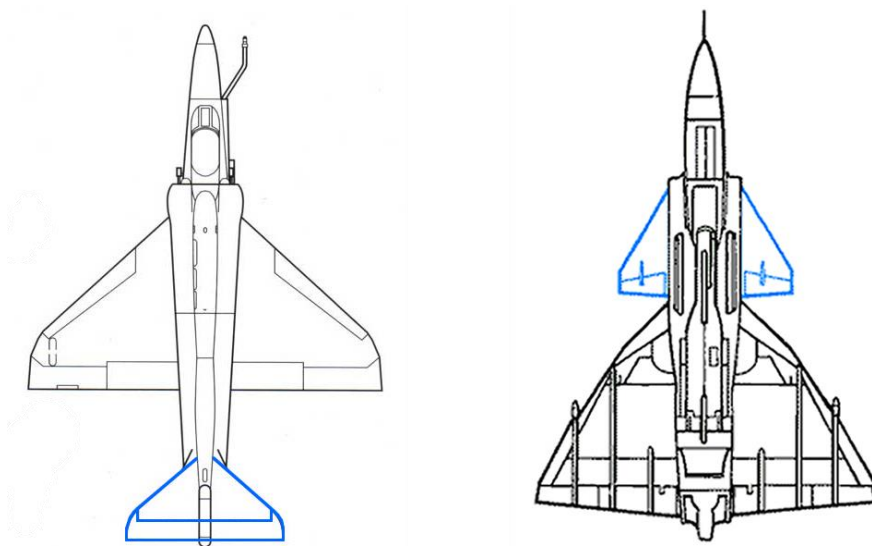


Fuente: **ABZUG, Malcolm J.; LARRABEE, E. Eugene.** *Airplane stability and control: a history of the technologies that made aviation possible.* Página 2.

1.2 Configuración Canard

Se le conoce a este tipo de configuración, a aquellas aeronaves de ala fija que tienen una pequeña superficie horizontal (estabilizador horizontal) por delante del ala principal, en contra posición a un avión de configuración convencional donde esta se ubican detrás del ala principal. La ubicación del estabilizador horizontal afecta los momentos de giro en el plano vertical, si accionamos esta superficie con un ángulo positivo, para la configuración canard nos generara un momento positivo haciendo elevar la nariz de la aeronave, por el contrario, en la configuración convencional nos generaría un momento negativo haciendo bajar la nariz de la misma.

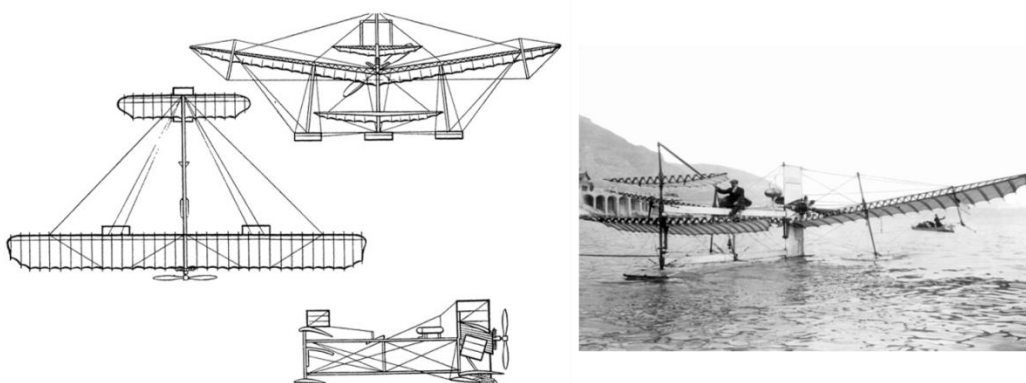
Figura 1.3 Comparación entre aeronaves de configuración tipo convencional contra aeronaves de configuración tipo canard, respectivamente.



Fuente: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:McDONNELL DOUGLAS A-4 SKYHAWK.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:McDONNELL_DOUGLAS_A-4_SKYHAWK.png), [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SaabViggen Canards.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SaabViggen_Canards.jpg).

El nombre “canard” a esta configuración se le dio en el año de 1910 con la construcción del hidroavión *Fabre* en Francia, que en vuelo, parecía tener un aspecto al de un pato volando con el cuello estrecho y una trompa extendida, la traducción de pato del español al francés es canard, desde entonces a todo avión con el estabilizador horizontal hacia adelante se les denomina canard.

Figura 1.4Hidroavión Fabre, diseñado por Henri Fabre en 1910.



Fuente: <http://www.airwar.ru/enc/law1/hidroavion.html>, http://ibytes.es/blog_historia_de_la_aviacion.html.

El primer uso de la configuración canard se aplicó al modelo que habían desarrollado los hermanos Wright, en el Wight Flyer, a comienzos del siglo XX, que fue un tipo de configuración diferente al inventado por George Cayley y desarrollado posteriormente por Alphonse Penaud, Otto Lilienthal, entre otros, que era conocido como una configuración convencional o de superficies atrás.

Los hermanos Wright, a pesar de que aplicaron una configuración totalmente diferente a la cual se venía desarrollando por anteriores diseñadores, los Wright retomaron los estudios alcanzados por los antiguos diseñadores aeronáuticos, intentando hallar el porque habrían fracasado en el intento de obtener un vuelo controlado y prolongado. De esta manera, ellos concluyeron que el único objetivo principal que se perseguía era la sustentación de una aeronave, mas no la maniobrabilidad del mismo.

Con lo anterior, los Wright, en el desarrollo de su modelo (Wight Flyer), enfocaron su objetivo en la maniobrabilidad de la aeronave, para ello, trasladaron el estabilizador horizontal de atrás hacia adelante del ala principal, permitiendo así un mejor control en el movimiento de cabeceo o pitch desplazando el centro de gravedad hacia adelante para así reducir la inestabilidad de campo, y para la estabilidad del mismo en vuelo, añadieron dos alas principales una encima de la otra (biplano), para generar una mayor sustentación a menor envergadura e instalaron un motor que accionaba dos hélices produciendo un empuje hacia adelante.

Para la década de los 20's, en el *Focke-Wulf F19*, un canard que se diseñó solo con propósitos experimentales, que a la final no tuvo tanto éxito, ya que el estabilizador horizontal interrumpía la visibilidad del piloto, y desde entonces, paso aproximadamente medio siglo para volver a tener una aeronaves con estas características. Para finales de la década de los 60's, se desarrolló el *Saab 37 Viggen*, un canard enfocado al campo militar, que sirvió de inspiración para los diseños de canard modernos realizados por Burt Rutan, aeronaves biplaza y de fácil manufactura, como el *Rutan VariViggen*, *Rutan VariEze* y el reconocido *long-Ez*. Para los años 80's, se diseñaron canards ejecutivos como *OMAC Laser 300*, *Avtek 400*, *Beechcraft Starship* y *Piaggio P.180 Avanti*.

Figura 1.5 Aeronaves de configuración Canard a través de la historia.



Fuente: imágenes obtenidas por web y posteriormente modificadas.

En la actualidad, la configuración canard se ha aplicado con mucha frecuencia en diferentes sectores aeronáuticos, en aeronaves comerciales, utilitarias, militares, experimentales, no tripuladas, etc. debido a su fácil maniobrabilidad en vuelo y su eficacia al estabilizarse a sí misma sin la intervención de alguna superficie de control.

El punto clave de desarrollo para un canard han sido sus grandes avances en estabilización y en controles computarizados modernos que han permitido dar vuelta a complejas interacciones existentes en el flujo de aire entre el canard y el ala, el cual es principal problema de estabilidad en contra a las ventajas de maniobrabilidad.

1.3 Principios De Análisis Dinámico De Aeronaves

F.W Manchester fue el primer occidental en investigar analíticamente la estabilidad dinámica de las aeronaves [2]. Estudio el comportamiento de las aeronaves con ayuda de modelos a escala, simplificando los resultados a un grupo de ecuaciones de movimiento en aeronaves simétricas. Él le llamo a las trayectorias de vuelo resultantes fugoides, un nombre que aún se sigue usando.

En el año del primer vuelo a motor, en 1903 Bryan y Williams usaron métodos matemáticos convencionales, introdujeron las ecuaciones de movimiento linealizadas que son hasta el día de hoy la base del estudio en la dinámica de aeronaves y sus respuestas al control automático[2]. Después las teorías de los movimientos longitudinal y lateral fueron presentadas por Bryan. Las seis ecuaciones de Euler para el movimiento general de un cuerpo rígido fueron consideradas para analizar pequeñas perturbaciones del estado estacionario de vuelo de una aeronave con un plano de simetría. Bajo esas consideraciones, las ecuaciones fueron ilustradas y divididas en dos grupos. Cada grupo se relaciona con las variables de movimiento en un solo plano de simetría de la aeronave. Ningún grupo debe tener variables que dependan del otro, sino que deben ser tratados de forma separada. Los grupos de ecuaciones separadas fueron llamadas 1) Simétrica o longitudinal y; 2) Asimétrica o latero-direccional. Una importante consecuencia en la consideración de pequeñas perturbaciones era que las fuerzas aerodinámicas de la aeronave mostrarían cierta dependencia sobre constantes o "derivadas de estabilidad", como ellos las llamaron. Bryan sugirió que deberían ser determinadas experimentalmente.

Cerca de 1912 Bairstow y Melvill Jones, del laboratorio nacional de física de Gran Bretaña siguió las ideas de Bryan y desarrollo algunas de las técnicas en el túnel de viento para la medición de las derivadas de estabilidad de modelos a escala [2]. Ellos presentaron sus resultados después de un año de esfuerzos, mostraron como las características de los movimientos deberían ser reconocidos de las soluciones matemáticas para la respuesta de lazo abierto (sin controladores) de un diseño preliminar de aeronave al cual midieron y calcularon todas las derivada,

y a su vez, desarrollaron una metodología para el proceso del modelado, método que aún se emplea.¹³

H Glavert, quien trabajo en el laboratorio nacional de física en el Reino unido en 1914, introdujo las técnicas de Bairstow para túneles de viento y el método de Bairstow-Bryan para el cálculo de la dinámica de estabilidad en los Estados Unidos [2]. El colaboro en el primer reporte de la NACA NASA el cual trataba sobre respuestas de aeronaves en vuelo. Posteriormente, Glavert calculo las derivadas de estabilidad de una hélice y los movimientos de una aeronave con los elevadores libres [2].

Las mediciones del modelo o el cálculo particular de las derivadas de estabilidad continuaron llamando la atención y se realizó una serie de trabajos de investigación para la medición de derivadas, movimientos en lazo abierto, y la respuesta a controladores. Dichas investigaciones se realizaron en pruebas de vuelo en aeronaves a escala real.

En 1935, cuando la investigación de B. Melvill Jones apareció en la teoría aerodinámica de Durand, la aproximación clásica de Bairstow- Bryan fue bien establecida pero muy poco usada [2]. Los resultados de los experimentos en modelos a escala real, probaron que la teoría de movimientos infinitesimales era un método práctico para la predicción de la estabilidad de movimientos y arrojaba resultados útiles para predecir los movimientos de respuesta e implementar el control. El efecto de los diferentes diseños en la configuración de aeronaves típicas ha sido registrado a través de los resultados obtenidos en distintos experimentos.

Por ello, los resultados obtenidos no fueron apreciados solo como ejemplos de valores numéricos específicos, sino de una forma más general, al menos en parte como una aproximación dada en términos de literales dominantes para las derivadas de estabilidad.

En los análisis hechos en aquella época se tenía la dificultad de obtener el resultado requerido. No era fácil trazar una conexión entre la respuesta final que era registrada y las características específicas de la aeronave,

¹³**MCRUER, Duane T.; GRAHAM, Dunstan; ASHKENAS, Irving.** *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton University Press, 1972.

las cuales son representadas por varias derivadas incluidas en las ecuaciones de movimiento.

En ese entonces no existían aun las herramientas suficientes para determinar respuestas a entradas específicas. Aunque no había una metodología específica las soluciones de λ (como las frecuencias y factores de amortiguamiento) que se obtenían en vuelo era todo lo que se requería [2]. La omisión de ciertos términos, los cuales son relativamente no importantes, provocaba una gran simplificación para hacer que la relación causa efecto pudiese ser determinada con facilidad.

La situación cambió drásticamente durante los próximos diez años. Se introdujo un método con operadores, lo cual redujo la labor del cálculo, y para hacer la técnica tan simple y general como fuera posible, se introdujo una notación adimensional, y se agregó al cálculo información sobre factores de estabilidad de gráficos convenientes.

Los investigadores aceleraron sus trabajos con la guerra y algunas improvisaciones fueron hechas, como por ejemplo, la importancia de la interferencia entre el ala y el fuselaje y los efectos de los motores en las derivadas de estabilidad, el efecto directo en el balance debido a tener los controles libres, la respuesta a movimientos particulares de controles como el caso de los frenos aerodinámicos y la influencia de cambios en el diseño sobre el carácter de los movimientos.

Sin embargo, el valor y características de las entradas en forma matemática aún estaban restringidos, no se podía manipular al sistema matemáticamente con entradas fijas, es decir, valores constantes en la deflexión de las superficies de control, sino que se tenían algunas restricciones.

Las superficies de control tenían que estar fijas en los primeros estudios. La programación de las entradas se podía hacer únicamente con funciones simples, como la función paso o rampa. Esto hacía no solo que los cálculos fuesen laboriosos sino que los resultados estuvieran alejados de la realidad. Además, en vuelo real, las entradas eran más o menos constantes o variantes; eran ejecutadas, ya sea por el piloto o por algún autopiloto.

No fue sino hasta a finales de la guerra cuando se lograron útiles herramientas para lograr la conexión entre la respuesta a algunas

perturbaciones específicas, así como la operación de controladores y las características de las aeronaves que eran representadas por varias derivadas [2], lo cual se sigue usando hasta la fecha.

Los programas de matemáticas facilitan la resolución de ecuaciones y ayudan a visualizar los resultados de forma gráfica. Además de que se pueden programar rutinas para lograr la manipulación de las entradas.

Aun ahora, después del trabajo de muchos investigadores en el área de la matemática y mecánica de fluidos, el modelo matemático se sigue haciendo por métodos experimentales o semiempíricos, utilizando datos de experimentos hechos y tabulados en tablas y graficas de distintas configuraciones aerodinámicas. Dichos experimentos se realizan en vuelo y en modelos a escala en túneles de viento.

Básicamente el modelado se puede clasificar en dos tipos; lineal y no lineal, a partir de esto, la caracterización del modelo puede ser, teórica, semiempírica, o empírica.

1.4 Modelos Matemáticos Actualidad

1.4.1 Modelado Lineal.

Una solución por el camino analítico es mucho más precisa, pero demasiado complicada, normalmente el modelo matemático se linealiza para su solución. Dicha solución resulta relativamente sencilla. El gran problema recae en la obtención de las características aerodinámicas.

En el caso de un prototipo aerodinámico, cuando este se linealiza, surgen coeficientes, los cuales definen el comportamiento dinámico de la aeronave. Estos coeficientes son análogos al coeficiente de amortiguamiento y de rigidez de algún sistema masa-resorte. Si se planea obtener los coeficientes por medios completamente teóricos se necesita profundizar en mecánica de fluidos y posiblemente, para obtener un buen resultado se necesita más de un especialista.

Dentro de la metodología teórica, los especialistas pueden crear programas computacionales que ayuden al análisis del prototipo. O bien, dicho análisis se puede realizar con ayuda de programas comerciales de análisis de fluidos. Si se elige realizar un programa computacional, se puede utilizar métodos alternos de solución a los analíticos, de acuerdo

a las leyes de la mecánica de fluidos. Por ejemplo, métodos numéricos, ya sean como alternativas de solución de ecuaciones diferenciales, o bien el método de elemento finito.

Por tiempo, dificultad y costos, es preferible que a partir del modelo matemático lineal se obtenga la caracterización aerodinámica con programa de análisis de fluidos comercial.¹⁴

1.4.2 Modelado Semiempírico.

Independientemente de las ecuaciones de movimiento, las cuales se analizan de forma completamente teórica, la caracterización aerodinámica puede ser semiempírica. Y puede serlo de diferentes maneras. Una forma de combinar la confiabilidad de pruebas en túnel de viento, con lo económico del proceso teórico es el empleo de, DATCOM (Datum Compendium)¹⁵ que es un método de cálculo de características de estabilidad y control de aeronaves y misiles desarrollado por la USAF. Originalmente se compilo en varios volúmenes con múltiples tablas y formulas a las que recurrían las oficinas de diseño. En 1980 Mc- Donnell Douglas digitalizo toda la información en un programa. Este tipo de información consta de valores característicos para diferentes configuraciones, geométricas y proporciones. A partir de estos datos, se pueden llenar los valores de coeficientes en un modelo matemático lineal, estos coeficientes, son constantes, conocidas en el ámbito aeronáutico como derivadas de estabilidad.

1.4.3 Método de caracterización aerodinámica empírica.

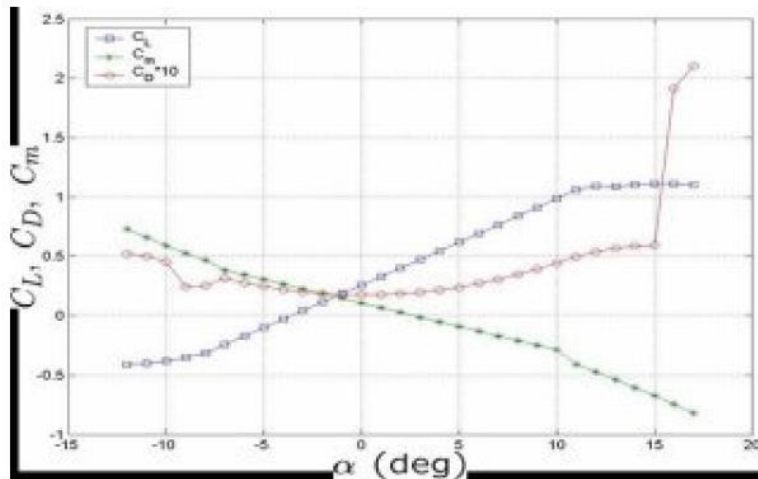
Un método empírico clásico, es la obtención de los coeficientes característicos del modelo, por experimentación en túneles de viento, para posteriormente ser introducidos en el proceso de modelación matemática. Específicamente, lo que se obtiene por métodos experimentales son gráficos de una variable de estado contra alguna fuerza, normalmente adimensionalizada. Por ejemplo, en la figura se muestra el coeficiente de sustentación, coeficiente de arrastre y coeficiente de momento, contra una variable de estado, que en este caso representa el ángulo de incidencia entre la velocidad del aire y el ala de

¹⁴ESCOBEDO ALVA, Jonathan Omega. “Análisis Dinámico de Prototipos Aerodinámicos de Ala Fija y Rotativa”. 2012. Tesis Doctoral.

¹⁵FINK, R.D. USAF Stability and Control Datcom, USAF, 1976.

la aeronave (ángulo de ataque). Las derivadas parciales de los coeficientes con respecto al ángulo de ataque, son nombradas derivadas de estabilidad, que físicamente son las pendientes de las curvas graficadas.³

Grafica 1.1 Coeficientes aerodinámicos con respecto al ángulo de ataque.



Fuente: Análisis Dinámico de Prototipos Aerodinámicos de ala fija y rotativa.

Estas derivadas de estabilidad, o coeficientes del sistema, están en función de varios términos, de la geometría del vehículo, de las condiciones atmosféricas, del número de Mach, entre otros.

Así como se obtienen las derivadas de estabilidad en túneles de viento, también pueden obtenerse en pruebas de vuelo, tomando lectura de las variables necesarias.

Es importante mencionar que tanto los coeficientes de sustentación, arrastre y momentos, así como las derivadas de estabilidad son coeficientes. Los primeros tres son simplemente coeficientes aerodinámicos, y las derivadas de estabilidad son coeficientes característicos de la dinámica de la aeronave los cuales pueden ser constituidos por coeficientes aerodinámicos o de masa.

1.4.4 Modelo No Lineal.

Como ya se sabe, el comportamiento de una aeronave es no lineal, sin embargo la solución de las ecuaciones que la modelan es muy

complicada por métodos completamente analíticos, por lo tanto la solución de sistemas no lineales, suele hacerse con computadoras analógicas o métodos numéricos. Un método muy usado, es el uso de las iteraciones. Se resuelven las ecuaciones diferenciales para un instante determinado, las variables de salida que arroja la solución vuelven a ser introducidas al sistema, de esta manera se puede obtener la solución de ecuaciones diferenciales no lineales, en un intervalo de tiempo definido, la exactitud de la solución dependerá directamente del espacio entre puntos de tiempo, al ser más pequeños estos, el número de discretizaciones será mayor en un intervalo de tiempo igual.

1.4.5 Caracterización aerodinámica.

Para los valores característicos, las derivadas de estabilidad aquí no son empleadas. Simplemente se utilizan los coeficientes aerodinámicos, para ser introducidos al modelo.³

2 MECANICA DE VUELO

La mecánica de vuelo de una aeronave puede ser dividida dentro de cinco grandes áreas: análisis de la trayectoria del vehículo (performance), estabilidad y control, dimensionamiento de la aeronave, simulación y pruebas de vuelo. Solamente los aspectos teóricos de estabilidad y control son cubiertos en este texto.

El dimensionamiento de la aeronave y simulación son esencialmente de naturaleza numérica. El dimensionamiento de la aeronave es un proceso iterativo, y la simulación involucra la integración numérica de un conjunto de ecuaciones diferenciales. Las pruebas de vuelo es la parte experimental de la mecánica de vuelo.

La mecánica de vuelo es la aplicación de las leyes de Newton ($F = ma$ y $M = I\alpha$), para el estudio de trayectoria del vehículo (performance), estabilidad y control aerodinámico, existen dos problemas básicos en la mecánica de vuelo del avión:

1. Dado el avión ¿cuáles son sus características de performance, estabilidad y control?
2. Dadas las características de performance, estabilidad y control ¿Cuál es el avión?

Este último es llamado dimensionamiento del avión y está basado en la definición de un perfil de misión estándar. En el proceso de dimensionamiento se requiere que todos los aviones sean estáticamente estables. Mientras que la estabilidad dinámica no es requerida en el proceso de dimensionamiento, la linealización de las ecuaciones de movimiento son usadas en el diseño de sistemas de control automático de vuelo.

La mecánica de vuelo es una disciplina. Como tal, tiene ecuaciones de movimiento, aproximaciones aceptables y técnicas de solución aproximadas para las ecuaciones de movimiento.

Es importante diferenciar el estudio de performance con el de estabilidad y control. Para el estudio de performance las ecuaciones de fuerzas ($F = ma$), son desacopladas de las ecuaciones de momentos ($M = I\alpha$), porque se asume que la aeronave no está rotando y que la deflexión de

las superficies de control no cambian las fuerzas de sustentación y arrastre. Las ecuaciones resultantes se refieren al modelo de tres grados de libertad (3DOF), y sus investigaciones se llaman análisis de trayectoria.¹⁶

Para el estudio de estabilidad y control, ambas $F = ma$ y $M = I\alpha$ son necesarias y las ecuaciones resultantes se refieren como, al modelo de seis grados de libertad (6DOF).

- Estabilidad y Control

Los estudios de estabilidad y control tratan del movimiento del centro de gravedad (cg) relativo a la tierra y el movimiento de la aeronave alrededor del CG. Aquí el estudio de estabilidad y control involucra el uso de las ecuaciones de movimiento del modelo de 6DOF. Estos estudios son divididos dentro de dos grandes categorías: estabilidad estática y control, estabilidad dinámica y control. Debido a la naturaleza del proceso de solución, cada categoría se subdivide en movimiento longitudinal (*pitching motion*) y movimiento latero-direccional (*rolling and yawing motion*). El análisis de estabilidad y control son en términos de los ángulos de orientación (ángulo de ataque y ángulo de deslizamiento lateral) respectivamente y la deflexión de las superficies de control.

- Estabilidad Estática y Control

Para un vuelo quasi-estacionario la estabilidad estática y control se refiere principalmente a cuatro temas: condiciones de trim, estabilidad estática, efectos del centro de gravedad y control de la fuerza y (handling qualities). Las condiciones de trim son la orientación de los ángulos y la deflexión de las superficies de control requeridas para una condición de vuelo particular. Dada una perturbación desde una condición de vuelo estacionaria, la estabilidad estática investiga la tendencia de un avión a reducir la perturbación.

¹⁶HULL, David G. *Fundamentals of airplane flight mechanics*. Springer; Austin, Texas, 2007.

- Estabilidad Dinámica y Control

La estabilidad dinámica y control trata del movimiento de un avión seguido de una perturbación tal como una ráfaga de viento (el cual cambia la velocidad, el ángulo de ataque o de deslizamiento lateral) o una entrada de control.

Mientras que estos estudios pueden y son realizados usando simulaciones detalladas en computadoras, es difícil determinar la causa y efecto, como una consecuencia de esto es conveniente desarrollar un método analítico aproximado.

Esto es hecho, empezando con el avión en una condición de vuelo quasi-estacionaria (dando la altitud, numero Mach y peso) e introduciendo una pequeña perturbación. Asumiendo que los cambios en las variables son pequeños, las ecuaciones de movimiento pueden ser linealizadas alrededor de una condición de vuelo estable. Este proceso lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes.

Como se conoce, desde la teoría de sistemas lineales, la respuesta de un avión a una perturbación es la suma de un número de movimientos llamados modos. Mientras que para cada modo no es necesario ser estable, es necesario conocer para cada modo las características de estabilidad y respuesta.⁵

2.1 Desarrollo De Las Ecuaciones De Movimiento

El performance de una aeronave puede adecuadamente ser descrita asumiendo la aeronave un punto de masa en el centro de gravedad (cg).

Las cualidades de vuelo o características de estabilidad de una aeronave, por otra parte, no pueden ser descritas de tal simple manera. En vez de esto las cualidades de vuelo de una aeronave deben ser descritas analíticamente como los movimientos del cg de la aeronave, así como el movimiento de la estructura de la aeronave (fuselaje) alrededor del cg, ambas las cuales son causadas por las fuerzas aerodinámicas, de empuje y momentos. Además, la aeronave debe ser considerada como un cuerpo de tres dimensiones y no un punto de masa.

Las fuerzas y momentos aplicados sobre la aeronave y el resultado de la respuesta son tradicionalmente descritos por un conjunto de ecuaciones conocidas como las ecuaciones de movimiento de la aeronave.

Una aeronave tiene seis grados de libertad (si este se asume rígido) lo cual significa que tiene seis trayectorias y este es libre de seguirlas: este puede moverse hacia adelante, a los lados y abajo; y puede rotar alrededor de los ejes yaw, pitch y roll. Con el fin de describir el estado de un sistema que tiene seis grados de libertad (6DOF), los valores para las variables (desconocidas) son necesarios. Para resolver estas seis incógnitas son necesarias seis ecuaciones simultáneas. Para una aeronave estas son conocidas como las ecuaciones de movimiento.

La totalidad de las ecuaciones de movimiento de la aeronave reflejan una relación bastante complicada entre las fuerzas y momentos sobre la aeronave, sin embargo la derivación de las ecuaciones siguen un patrón muy simple que inician a partir de la segunda ley de Newton para los movimientos de traslación y rotación.¹⁷

Para derivar estas ecuaciones la siguiente relación será usada

La segunda ley de Newton para movimiento de traslación es.

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{V}) \quad (2.1)$$

Donde \bar{F} es la suma de las fuerzas externamente aplicadas y $(m\bar{V})$ es el momentum lineal.

La segunda ley de Newton para movimiento de rotación es.

$$\bar{G} = \frac{d}{dt}(\bar{H}) \quad (2.2)$$

Donde \bar{G} es la suma de los momentos externamente aplicados y (\bar{H}) es el momentum angular.

¹⁷**AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards.** *USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook, Volume 2, Part 1.*

\bar{F} Y \bar{G} son vectores cuantitativos los cuales cada uno pueden ser representados por tres componentes de ecuaciones (correspondiente al espacio de tres dimensiones).

Por lo tanto la ecuación de traslación describe a la aeronave con respecto a estos tres grados de libertad de traslación, mientras que la ecuación de rotación describe a la aeronave con respecto a estos tres grados de libertad de rotación.

Por consiguiente la segunda ley de Newton genera seis ecuaciones para los seis grados de libertad de un cuerpo rígido.

Las ecuaciones son válidas solamente para el espacio inercial.

Para derivar las ecuaciones de movimiento, cada lado de las ecuaciones de Newton son expandidas para generar las siguientes seis ecuaciones diferenciales no lineales.⁶

Modo Longitudinal

$$F_x = m(\dot{U} + QW - RV) \quad (2.3)$$

$$F_z = m(\dot{W} + PV - QU) \quad (2.4)$$

$$G_Y = \dot{Q}I_y - PR(I_z - I_x) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (2.5)$$

Modo Latero-Direccional

$$F_y = m(\dot{V} + PV + PW) \quad (2.6)$$

$$G_x = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \quad (2.7)$$

$$G_z = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) + (QR - \dot{P})I_{xz} \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones de la mano izquierda representan las fuerzas y momentos aplicados sobre la aeronave, mientras que las de la mano derecha destacan la respuesta de la aeronave a esas fuerzas y momentos. La teoría de pequeña perturbación será usada para linealizar estas ecuaciones, de esta manera se pueden solucionar. Esto también

producirá términos conocidos como derivadas de estabilidad las cuales indican la influencia de varias características de la aeronave sobre los movimientos resultantes de la aeronave y son útiles en la comparación de las aeronaves. Las ecuaciones también serán usadas para derivar las funciones de transferencia de la aeronave lo cual será parte fundamental del modelamiento matemático de la aeronave y su sistema de control.

Antes de empezar la derivación de las ecuaciones de movimiento de la aeronave un análisis sobre convención de signos y sistemas de coordenadas será presentado.

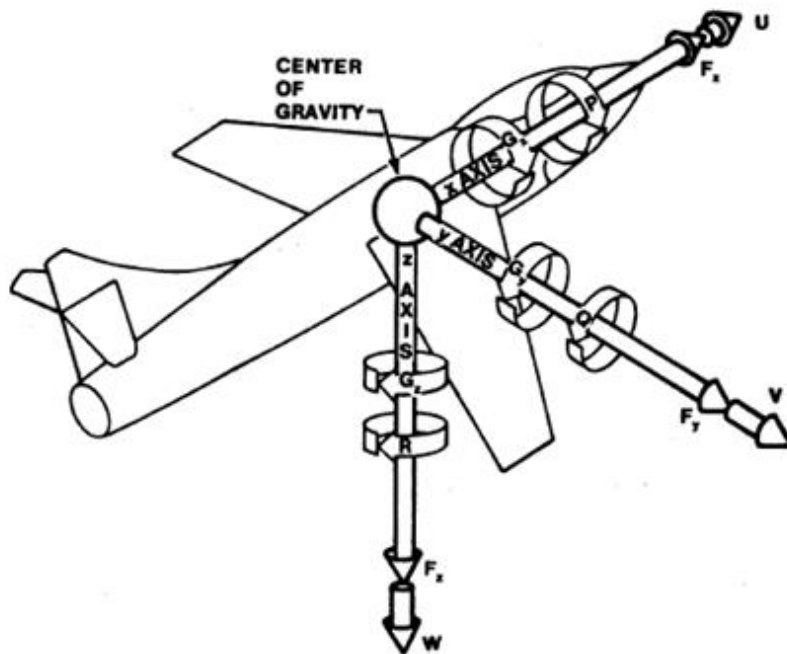
2.1.1 Convención de signos

Define el movimiento positivo de la aeronave causado por el movimiento positivo del control o deflexión (right yaw, pitch up, right roll). La figura 2.1 muestra esta convención y da la dirección positiva para muchas de las variables que aparecen en las ecuaciones de movimiento.

2.1.2 Sistemas de Coordenadas

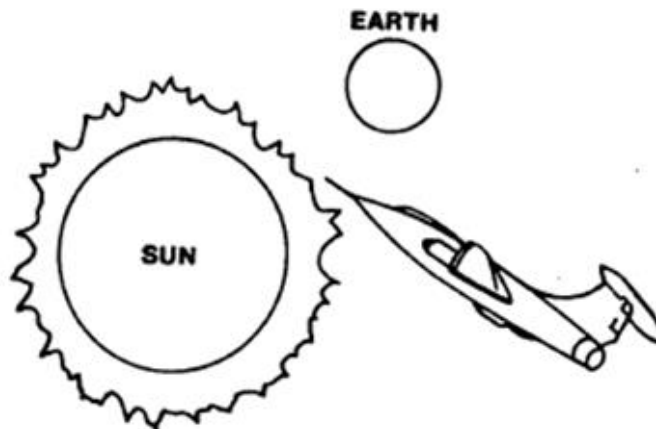
Hay muchos sistemas de coordenadas que son útiles en el análisis del movimiento del vehículo. Estaremos interesados con tres de estos sistemas de coordenadas: Inercial, ejes de la tierra y ejes del vehículo.⁶

Figura 2.1 Sistema de ejes de la aeronave y su notación.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, pagina 3.

Figura 2.2 Sistema de coordenadas inercial.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, pagina 7.

2.1.2.1 *Sistemas de coordenadas Inercial*

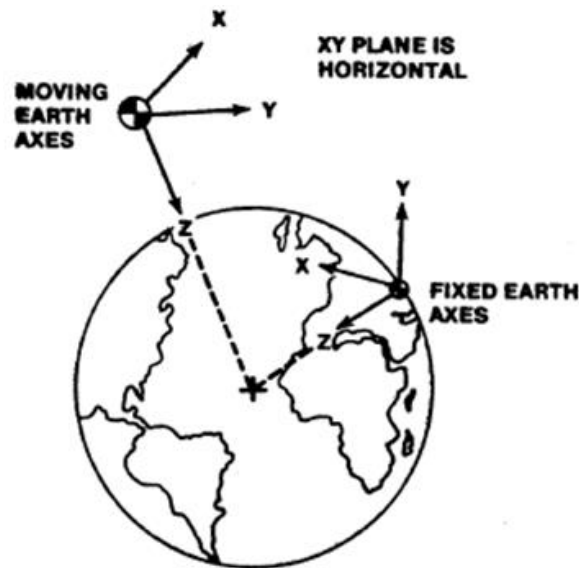
Es definido como un sistema en el cual la segunda ley de Newton es válida. Por lo tanto las ecuaciones de movimiento deben ser determinadas en un sistema de coordenadas inercial. Otra manera de definir este sistema de coordenadas es asumir lo como un sistema de ejes fijo en el espacio que no tiene movimiento relativo (Figura 2.2).

Para la dinámica espacial en nuestro sistema solar, el sistema de ejes del sol es una aproximación suficiente para un sistema inercial. Para una aeronave, el sistema de ejes de la tierra, es usualmente una aproximación suficiente para un sistema de coordenadas inercial.

2.1.2.2 *Sistema de ejes de la tierra*

Hay dos sistemas de ejes de la tierra, uno fijo y el otro móvil. Ambos serán referidos con las letras XYZ para las tres coordenadas de los ejes. Un ejemplo de un sistema de ejes de tierra móvil es una plataforma de navegación inercial. Un ejemplo de sistema de ejes de tierra fijo es el sitio de un radar. (Figura 2.3).⁶

Figura 2.3 Sistema de ejes de tierra.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 8.

2.1.2.3 Sistema de ejes del vehículo

Este sistema de coordenadas tiene un origen fijo en el vehículo, y ejes definidos con respecto al vehículo. Hay cuatro diferentes tipos de ejes, los cuales son comúnmente usados para el movimiento de una aeronave: Sistema de ejes de cuerpo, Sistema de ejes de estabilidad, el Sistema de ejes Principal y el sistema de ejes de viento.

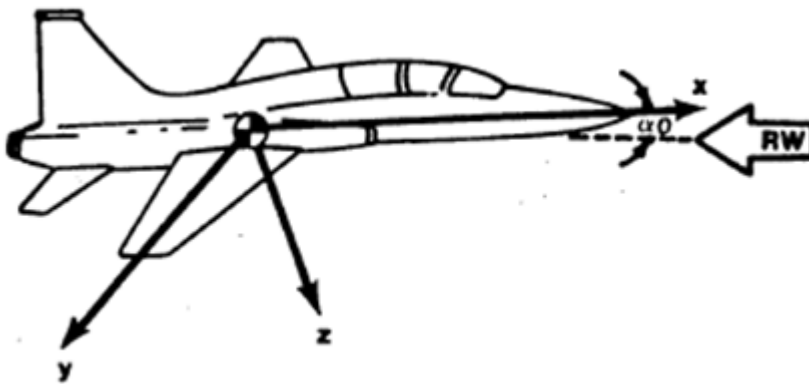
2.1.2.3.1 Sistema de Ejes de Cuerpo

Es el tipo de sistema de ejes más general el cual el origen y los ejes son fijos a un cuerpo rígido. El uso de los ejes fijos del vehículo asegura que los momentos y productos de inercia en las ecuaciones de movimiento sean constantes, en medida de que la masa también puede ser considerada constante y que las fuerzas aerodinámicas y momentos dependen solamente a los ángulos de orientación de la velocidad relativa α y β .

El sistema de ejes de cuerpo fijo es también el marco neutral de referencia para la mayoría de las observaciones y medidas del movimiento del vehículo y será referenciada como el sistema xyz.

En el sistema de ejes de cuerpo los vectores unitarios son \bar{i} , \bar{j} , y \bar{k} con origen en el centro de gravedad del vehículo, usualmente el plano xz es el plano de simetría del vehículo (Figura 2.4).⁶

Figura 2.4 Sistema de ejes de cuerpo.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 9.

2.1.2.3.2 Sistema de ejes de estabilidad

Los ejes de estabilidad son ejes de cuerpo especializados (Figura 2.5) en el cual la orientación del sistema de ejes del vehículo es determinada por la condición de vuelo en equilibrio. El eje x_s es seleccionado para que coincida con el viento relativo en el inicio del movimiento.

Figura 2.5 Sistema de ejes de estabilidad.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 10.

2.1.2.3.3 Ejes principales

Son un conjunto especial del eje de cuerpo, alineados con el eje principal del vehículo y son usados para ciertas aplicaciones. Los ejes principales son definidos como esos ejes donde todos los productos de inercia son reducidos a Zero. Así las ecuaciones de movimiento son generalmente simplificadas, pero es difícil describir con exactitud el movimiento de la aeronave en este sistema.

2.1.2.3.4 Ejes de viento

Los ejes de viento utilizan la velocidad de traslación del vehículo como referencia para el sistema de ejes. Por lo tanto los ejes de viento están orientados con respecto a la trayectoria de vuelo del vehículo.

La relación entre los ejes de viento y los ejes de cuerpo del vehículo de un cuerpo rígido define el ángulo de ataque, α y el ángulo de

deslizamiento lateral β . Conviene que estos ángulos sean variables independientes para el uso en la expresión de fuerzas aerodinámicas y coeficientes de momentos.⁶

Los ejes de viento no son generalmente usados en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido, porque como en el caso de los ejes de la tierra, el momento de inercia y los términos en los productos de inercia en las tres ecuaciones de movimiento rotacional varían con el tiempo, α y β .

2.1.3 Definición de vectores

Las ecuaciones de movimiento describen el movimiento de un vehículo en términos de cuatro vectores (\bar{F} , \bar{G} , \bar{V}_T , $\bar{\omega}$). Los componentes de estos vectores resueltos a lo largo del sistema de ejes de cuerpo, se muestran a continuación.⁶

1. $\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$
2. $\bar{G} = G_x \bar{i} + G_y \bar{j} + G_z \bar{k} = \text{Momento total aplicado}$
 $\bar{G} = \bar{G}_{\text{aerodinamico}} + \bar{G}_{\text{otras fuentes}}$
 $\bar{G}_{\text{aerodinamico}} = L_{\text{aero}} \bar{i} + M_{\text{aero}} \bar{j} + N_{\text{aero}} \bar{k}$
 $\bar{G}_{\text{aerodinamico}} = l \bar{i} + m \bar{j} + n \bar{k}$
3. $\bar{V}_T = U \bar{i} + V \bar{j} + W \bar{k} = \text{Velocidad verdadera}$
 $U = \text{Velocidad hacia adelante}$
 $V = \text{Velocidad lateral}$
 $W = \text{Velocidad vertical}$
4. $\bar{\omega} = P \bar{i} + Q \bar{j} + R \bar{k} = \text{Velocidad angular}$
 $P = \text{Razón de Alabeo}$
 $Q = \text{Razón de Cabeceo}$
 $R = \text{Razón de Guiñada}$

2.1.4 Derivación de las ecuaciones de movimiento de la mano derecha (RHS).

Las ecuaciones de la mano derecha representan la respuesta de la aeronave a fuerzas o momentos. A través de la aplicación de la segunda ley de Newton, la relación de dos vectores puede ser usada para derivar las seis ecuaciones requeridas, tres de traslación y tres de rotación. Una aeronave que se considere flexible, da lugar a los efectos de aeroelasticidad y son grados de libertad adicionales (requiriendo más variables y ecuaciones), estas se consideraran por separado.

- Suposiciones

Las siguientes suposiciones serán hechas para simplificar la derivación de las ecuaciones de movimiento. La razón de estas suposiciones hará evidente que las ecuaciones se deriven.

Cuerpo Rígido: Los efectos de aeroelasticidad se deben considerar por separado.

La tierra y la atmosfera se asumen fijos en el espacio inercial: Para la mayoría de las aeronaves el sistema de ejes de tierra fijo puede ser asumido un sistema de coordenadas inercial de esta manera las leyes de Newton pueden ser aplicadas.

Masa (m) constante: En estabilidad y control la mayor parte del análisis del movimiento toma lugar en un corto periodo de tiempo, por lo tanto $\frac{dm}{dt} = 0$.

El plano x-z es un plano de simetría: Esta restricción es hecha para simplificar las ecuaciones de la mano derecha. Esto causa que los dos productos de inercia I_{xy} y I_{xz} sean cero. Esto permite que se cancelen los términos que contienen estos productos de inercia. La restricción puede ser fácilmente removida para incluir estos términos.

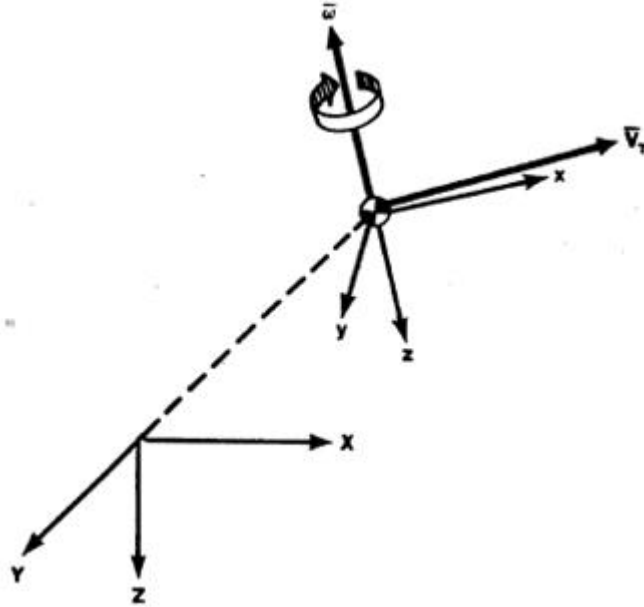
2.1.4.1 Relaciones de fuerza de traslación

La ecuación para el vector de traslación de la aeronave a partir de la segunda ley de newton es:

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{V}_T)}{dt} \Big|_{XYZ} \quad (2.9)$$

Donde \bar{V}_T es el vector de velocidad verdadera de la aeronave. La figura 2.6 muestra como este vector cambia en ambas, magnitud y dirección con respecto a xyz (ejes de cuerpo) y XYZ (ejes fijo de tierra).⁶

Figura 2.6 Velocidad verdadera del sistema de coordenadas de los ejes de tierra y de cuerpo.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 26.

A partir del análisis vectorial, la derivada de la velocidad \bar{V}_T en el sistema de coordenadas inercial (tierra fija), se relaciona con la derivada de \bar{V}_T en el sistema de ejes de cuerpo a través de esta relación.

$$\left. \frac{d\bar{V}_T}{dt} \right|_{XYZ} = \left. \frac{d\bar{V}_T}{dt} \right|_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{V}_T \quad (2.10)$$

Sustituyendo esto dentro de la ecuación (9) y asumiendo la masa constante, la fuerza aplicada es.

$$\bar{F} = m \left[\left. \frac{d\bar{V}_T}{dt} \right|_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{V}_T \right] \quad (2.11)$$

\bar{V}_T Y $\bar{\omega}$, como ya se mencionó, son dos de los cuatro vectores usados en las ecuaciones de movimiento para describir el movimiento del vehículo.⁶

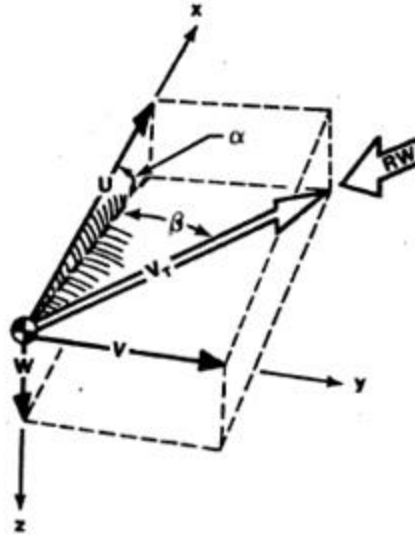
$$\bar{V}_T = U\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k} \quad (2.12)$$

Y

$$\bar{\omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \quad (2.13)$$

La relación de la velocidad verdadera y sus componentes a α y β y al sistema de coordenadas de ejes de cuerpo es mostrada en la figura 2.7.

Figura 2.7 Componentes de velocidad y orientación de los ángulos aerodinámicos, α y β .



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 13.

Los ángulos α y β pueden ser expresados en términos de las componentes de la velocidad como sigue.

$$\sin \alpha = \frac{W}{V_T \cos \beta} \quad (2.14)$$

Si β es pequeño (suposición), entonces $\cos \beta \cong 1$ y.

$$\sin \alpha \cong \frac{W}{V_T} \quad (2.15)$$

Si α también es pequeño (suposición), entonces.

$$\alpha \cong \frac{W}{V_T} \quad (2.16)$$

Algunos textos también definen.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{W}{U}$$

Para el ángulo de deslizamiento lateral β .

$$\sin \beta = \frac{V}{V_T} \quad (2.17)$$

Si β es pequeño, entonces $\sin \beta \cong \beta$.

$$\beta \cong \frac{V}{V_T} \quad (2.18)$$

Usando las ecuaciones (12) y (13), la ecuación de traslación (11) puede ahora ser escrita en forma de componente como.

$$\bar{F} = m \left[\dot{U}\bar{i} + \dot{V}\bar{j} + \dot{W}\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} \right] \quad (2.19)$$

Expandiendo

$$\bar{F} = m \left[\dot{U}\bar{i} + \dot{V}\bar{j} + \dot{W}\bar{k} + (QW - RV)\bar{i} - (PW - RU)\bar{j} + (PV - QU)\bar{k} \right] \quad (2.20)$$

Reordenando

$$\begin{aligned}\bar{F} = m[& (\dot{U} + QW - RV)\bar{i} + (\dot{V} + RU - PW)\bar{j} \\ & + (\dot{W} + PV - QU)\bar{k}] \end{aligned} \quad (2.21)$$

En forma de componentes, la suma de las fuerzas en el sistema de ejes de cuerpo es.

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k} \quad (2.22)$$

El resultado de las ecuaciones de traslación en las tres componentes es:

$$F_x = m(\dot{U} + QW - RV) \quad (2.23)$$

$$F_y = m(\dot{V} + PV + PW) \quad (2.24)$$

$$F_z = m(\dot{W} + PV - QU) \quad (2.25)$$

2.1.4.2 Ecuaciones de rotación

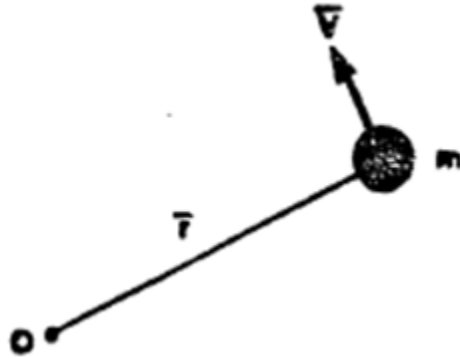
De nuevo, a partir de la segunda ley de Newton de la ecuación (2).

$$\bar{G} = \left. \frac{d(\bar{H})}{dt} \right|_{XYZ} \quad (2.26)$$

La ecuación (26) establece el cambio en el momentum angular \bar{H} , este equivale al momento aplicado \bar{G} .

El momentum angular puede ser pensado como un momentum lineal momento de brazo incluido. Considere una bola balanceándose sobre el extremo de una cuerda en cualquier instante de tiempo como se muestra en la figura 2.8.⁶

Figura 2.8 Momentum angular.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 28.

El momentum lineal de este sistema podría ser:

$$\overline{Momentum\ Lineal} = m\bar{V}$$

El momentum angular es definido como \bar{H} donde $\bar{H} = \bar{r} \times \overline{Momentum\ lineal}$ y desde el ejemplo de la figura 8, el ángulo entre \bar{r} y \bar{V} es 90 grados, la magnitud del momentum angular es mrV .

Así como una fuerza \bar{F} cambia el momentum lineal ($\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{V})$), un momento \bar{G} cambiará el momentum angular ($\bar{G} = \frac{d}{dt}(\bar{H})$).

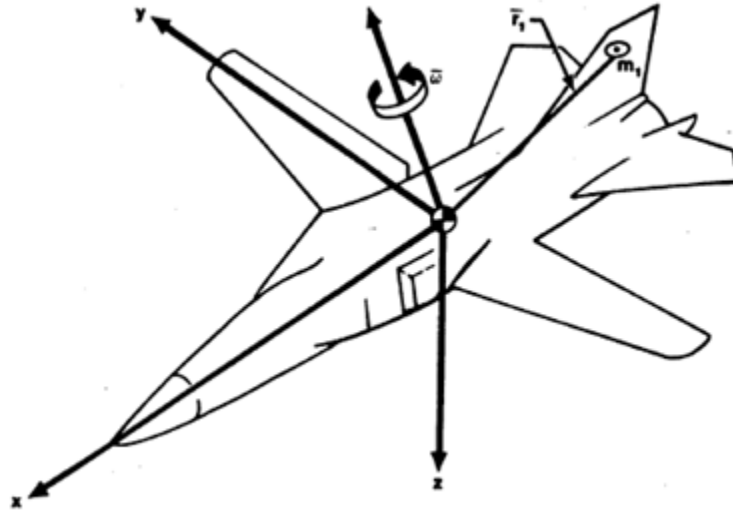
Un momento está relacionado a una fuerza, de la misma manera que un momentum angular es relacionado a un momentum lineal:

$$\overline{Momento} = \bar{r} \times \overline{Fuerza}$$

$$\overline{Momentum\ Angular} = \bar{r} \times \overline{Momentum\ lineal}$$

En principio para determinar el momentum angular de una aeronave, se considera un pequeño elemento de masa m_1 , en alguna parte de la aeronave, una distancia \bar{r}_1 desde el centro de gravedad (Figura 2.9).⁶

Figura 2.9 Desarrollo del momentum angular para cuerpos rígidos.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, pagina 29.

El momentum angular de m_1 es

$$\bar{H}_{m_1} = \bar{r}_1 \times m\bar{V}_1 = m_1(\bar{r}_1 \times \bar{V}_1) \quad (2.27)$$

Y

$$\bar{V}_1 = \left. \frac{d\bar{r}_1}{dt} \right|_{XYZ} \quad (\text{En el sistema de coordenadas inercial}) \quad (2.28)$$

Otra vez, a partir del análisis vectorial, la razón de cambio del vector del radio \bar{r}_1 puede ser relacionado en el sistema de ejes de cuerpo (xyz) por:

$$\bar{V}_1 = \left. \frac{d\bar{r}_1}{dt} \right|_{XYX} = \left. \frac{d\bar{r}_1}{dt} \right|_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{r}_1 \quad (2.29)$$

Desde que la aeronave sea considerada un cuerpo rígido \bar{r}_1 no cambia con el tiempo. Por lo tanto el primer término puede ser excluido, la velocidad inercial del elemento m_1 es

$$\bar{V}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}_1 \quad (2.30)$$

Sustituyendo esto dentro de la ecuación (27).

$$\bar{H}_{m_1} = m_1 [\bar{r}_1 \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1)] \quad (2.31)$$

Este es el momentum angular del elemento de masa m_1 . En principio para encontrar el momentum angular de la aeronave entera, se integrara sobre el volumen de la aeronave (v). ρ_A Es la densidad de masa de la aeronave.⁶

$$\bar{H} = \int_v \rho_A [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dv \quad (2.32)$$

Donde,

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (2.33)$$

Luego,

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

El determinante puede ser expandido para dar

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = (Qz - Ry)\bar{i} + (Rx - Pz)\bar{j} + (Py - Qx)\bar{k} \quad (2.35)$$

Por lo tanto, la ecuación (32) se convierte en

$$\begin{aligned} \bar{H} \int_v \rho_A [r(\bar{\omega}r)] dv \\ = \begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ (Qz - Ry) & (Rx - Pz) & (Py - Qx) \end{vmatrix} dv \end{aligned} \quad (2.36)$$

Así los componentes de \bar{H} son:

$$\bar{H}_x = \int_v \rho_A y(Py - Qx) dv - \int_v \rho_A z(Rx - Pz) dv \quad (2.37)$$

$$\bar{H}_y = \int_v \rho_A z(Qz - Ry) dv - \int_v \rho_A x(Py - Qx) dv \quad (2.38)$$

$$\bar{H}_z = \int_v \rho_A x(Rx - Pz) dv - \int_v \rho_A y(Qz - Ry) dv \quad (2.39)$$

Reordenando las ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{H}_x = P \int_v \rho_A (y^2 + z^2) dv - Q \int_v \rho_A xy dv \\ - R \int_v \rho_A xz dv \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_y = Q \int_v \rho_A (x^2 + z^2) dv - R \int_v \rho_A yz dv \\ - P \int_v \rho_A xy dv \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_z = R \int_v \rho_A (x^2 + y^2) dv - P \int_v \rho_A xz dv \\ - Q \int_v \rho_A yz dv\end{aligned}\tag{2.42}$$

Las integrales ahora son nuevamente organizables como momentos y productos de inercia.

Los momentos de inercia son definidos como:

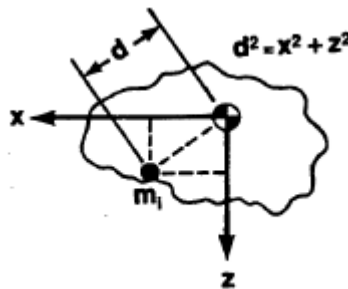
$$I_x = \int_v \rho_A (y^2 + z^2) dv\tag{2.43}$$

$$I_y = \int_v \rho_A (x^2 + z^2) dv\tag{2.44}$$

$$I_z = \int_v \rho_A (x^2 + y^2) dv\tag{2.45}$$

Esta es la medida de la resistencia a la rotación y nunca es cero. Ellas se ilustran en la figura 2.10.

Figura 2.10 Momento de inercia (I_y)



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 32.

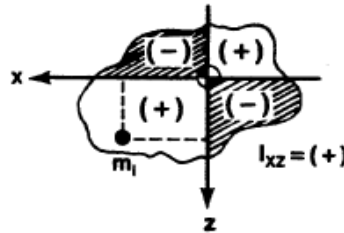
Los productos de inercia son definidos como: (Figura 2.11)

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_v \rho_A xy \, dv \quad (2.46)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_v \rho_A yz \, dv \quad (2.47)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int_v \rho_A xz \, dv \quad (2.48)$$

Figura 2.11 Producto de inercia (I_{xz})



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 32.

Los productos de inercia son medidas de simetría. Ellas son cero para vistas que tienen un plano de simetría

Sustituyendo dentro de las ecuación (40) a (42) se encuentra que el momentum angular de un cuerpo rígido es.

$$\bar{H} = H_x \bar{i} + H_y \bar{j} + H_z \bar{k} \quad (2.49)$$

Así que

$$H_x = P I_x - Q I_{xy} - R I_{xz} \quad (2.50)$$

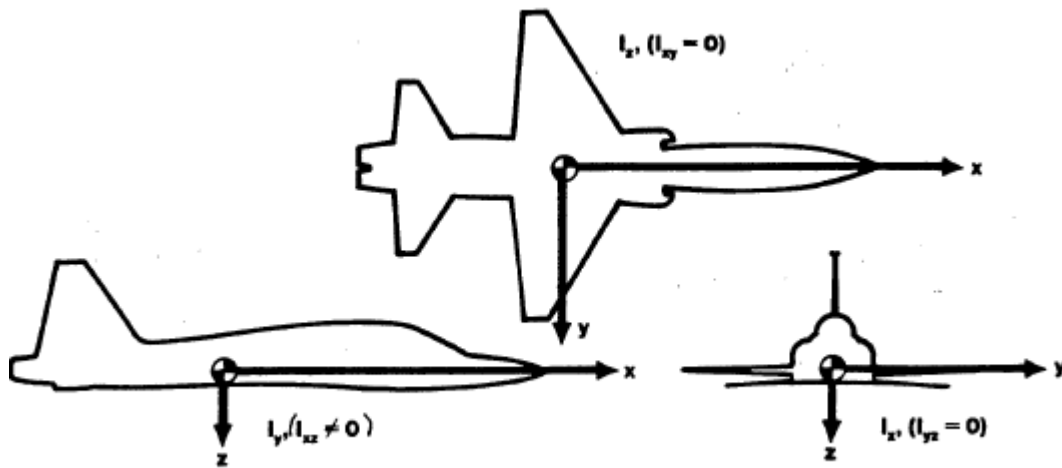
$$H_y = Q I_y - R I_{yz} - P I_{xy} \quad (2.51)$$

$$H_z = RI_z - PI_{xz} - QI_{yz} \quad (2.52)$$

Una aeronave es normalmente simétrica alrededor de los ejes x-z como se ilustra en la figura 2.12. En principio para simplificar las ecuaciones de movimiento de la mano derecha, se aplica la suposición de que el plano x-z es un plano de simetría y se obtiene:

$$\bar{H} = (PI_x - RI_{xz})\bar{i} + QI_y\bar{j} + (RI_z - PI_{xz})\bar{k} \quad (2.53)$$

Figura 2.12 Propiedades de inercia de la aeronave con respecto al plano de simetría x-z.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 33.

La ecuación para el momentum angular puede ahora ser sustituida dentro de la ecuación de momento.

$$\bar{G} = \frac{d\bar{H}}{dt} \Big|_{XYZ} \quad (2.54)$$

Aplicado solamente con respecto al espacio inercial. Expresado en el sistema de ejes de cuerpo fijo, la ecuación se convierte en:

$$\bar{G} = \frac{d\bar{H}}{dt} \Big|_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{H} \quad (2.55)$$

Lo cual es

$$\bar{G} = \dot{H}_x \bar{i} + \dot{H}_y \bar{j} + \dot{H}_z \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (2.56)$$

Recuerde, para una aeronave simétrica

$$\bar{H} = (PI_x - RI_{xz})\bar{i} + (QI_y)\bar{j} + (RI_z - PI_{xz})\bar{k} \quad (2.57)$$

Desde que el sistema de ejes de cuerpo es usado, los momentos de inercia y los productos de inercia son constantes. Por consiguiente mediante diferenciación y sustitución, la ecuación de momento se convierte en

$$\begin{aligned} \bar{G} = & (\dot{P}I_x - \dot{R}I_{xz})\bar{i} + \dot{Q}I_y\bar{j} + (\dot{R}I_z - \dot{P}I_{xz})\bar{k} \\ & + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ (PI_x - RI_{xz}) & (QI_y) & (RI_z - PI_{xz}) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Por lo tanto las componentes de las ecuaciones de rotación son:

$$\mathcal{L} = G_x = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \quad (2.59)$$

$$\mathcal{M} = G_y = \dot{Q}I_y - PR(I_z - I_x) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (2.60)$$

$$\mathcal{N} = G_z = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) + (QR - \dot{P})I_{xz} \quad (2.61)$$

Esto completa el desarrollo de las sí es ecuaciones de la mano derecha (ecuaciones 23 a 25 y 59 a 61).

2.1.5 Derivación de las ecuaciones de movimiento de la mano izquierda (LHS).

Las ecuaciones de movimiento relacionan el movimiento del vehículo con las fuerzas y momentos aplicados.⁶

<u>LHS</u>	=	<u>RHS</u>
Fuerzas y momentos aplicados		Movimiento del vehículo observado

$$F_x = m(\dot{U} + QW - RV)$$

$$G_x = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz}$$

etc.

Cada una de las seis ecuaciones de la mano derecha (RHS) han sido completamente expandidas en términos fácilmente cuantificables. Las ecuaciones de la mano izquierda (LHS) también deben ser expandidas en términos de variables prácticas. En principio para esto, se debe ser capaz de relacionar la orientación de los ejes del cuerpo (xyz) al movimiento de los ejes de tierra (XYZ), esto es hecho a través del uso de los ángulos de Euler. El movimiento del sistema de ejes de tierra es usado porque se ocupara de la orientación de la aeronave con respecto a la tierra y no de su posición (locación del cg) con respecto a la tierra.

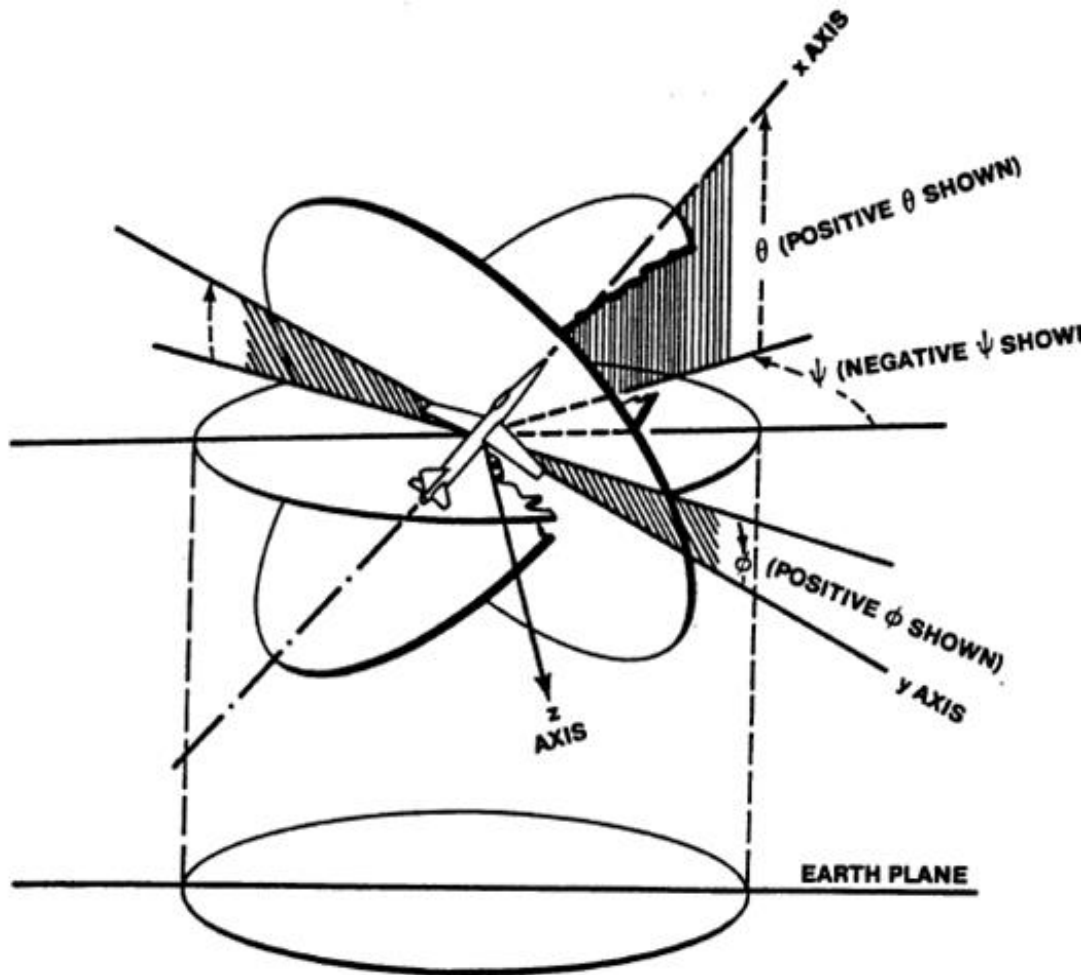
Ejes	Dirección	Nombre	Velocidad Lineal	Pequeño Desplazamiento Angular	Velocidad Angular
<i>OX</i>	<i>Hacia adelante</i>	<i>Alabeo</i>	<i>U</i>	<i>φ</i>	<i>P</i>
<i>OY</i>	<i>Hacia al ala derecha</i>	<i>Cabeceo</i>	<i>V</i>	<i>θ</i>	<i>Q</i>
<i>OZ</i>	<i>Hacia abajo</i>	<i>Guiñada</i>	<i>W</i>	<i>ψ</i>	<i>R</i>

Ejes	Momento de Inercia	Producto de Inercia	Fuerza	Momento
<i>OX</i>	<i>I_x</i>	<i>J_{xy} = 0</i>	<i>F_x</i>	<i>ℒ</i>
<i>OY</i>	<i>I_y</i>	<i>J_{yz} = 0</i>	<i>F_y</i>	<i>ℳ</i>
<i>OZ</i>	<i>I_z</i>	<i>J_{zx} ≠ 0</i>	<i>F_z</i>	<i>ℒ</i>

2.1.5.1 Ángulos de Euler

La orientación de cualquier sistema de coordenadas relativo a otro puede ser dada por tres ángulos (ángulos de Euler), los cuales son rotaciones consecutivas alrededor de los ejes z , y , x , en ese orden se lleva una estructura que coincide dentro de la otra. En dinámica de vuelo, los ángulos de Euler utilizados son aquellos los cuales llevan el movimiento de rotación del vehículo en el sistema de ejes de tierra a que coincida con el sistema de ejes del vehículo. (Figura 2.13).⁶

Figura 2.13 Rotación de los ángulos de Euler.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 15.

Los ángulos de Euler son expresados como YAW (Ψ), PITCH (θ) y ROLL (Φ). La secuencia (YAW, PITCH, ROLL) debe ser mantenida para llegar al conjunto adecuado de ángulos de Euler. Los ángulos de Euler son definidos como:

Angulo de Yaw (Ψ):

Es el ángulo comprendido entre la proyección del eje X del vehículo sobre el plano horizontal y la posición inicial de referencia del eje de la tierra X.

Angulo de Pitch (θ):

El ángulo es medido en el plano vertical entre el eje X de la aeronave y el plano horizontal.

Angulo de alabeo (Φ):

Es el ángulo medido en el plano YZ del sistema de ejes de la aeronave, entre el eje Y y el plano horizontal. Este es el mismo ángulo de banqueo para un determinado Ψ y θ , y este es medido desde la rotación alrededor del eje X.

Los límites aceptados en los ángulos Euler son:

$$-180^\circ \leq \Psi \leq 180^\circ$$

$$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

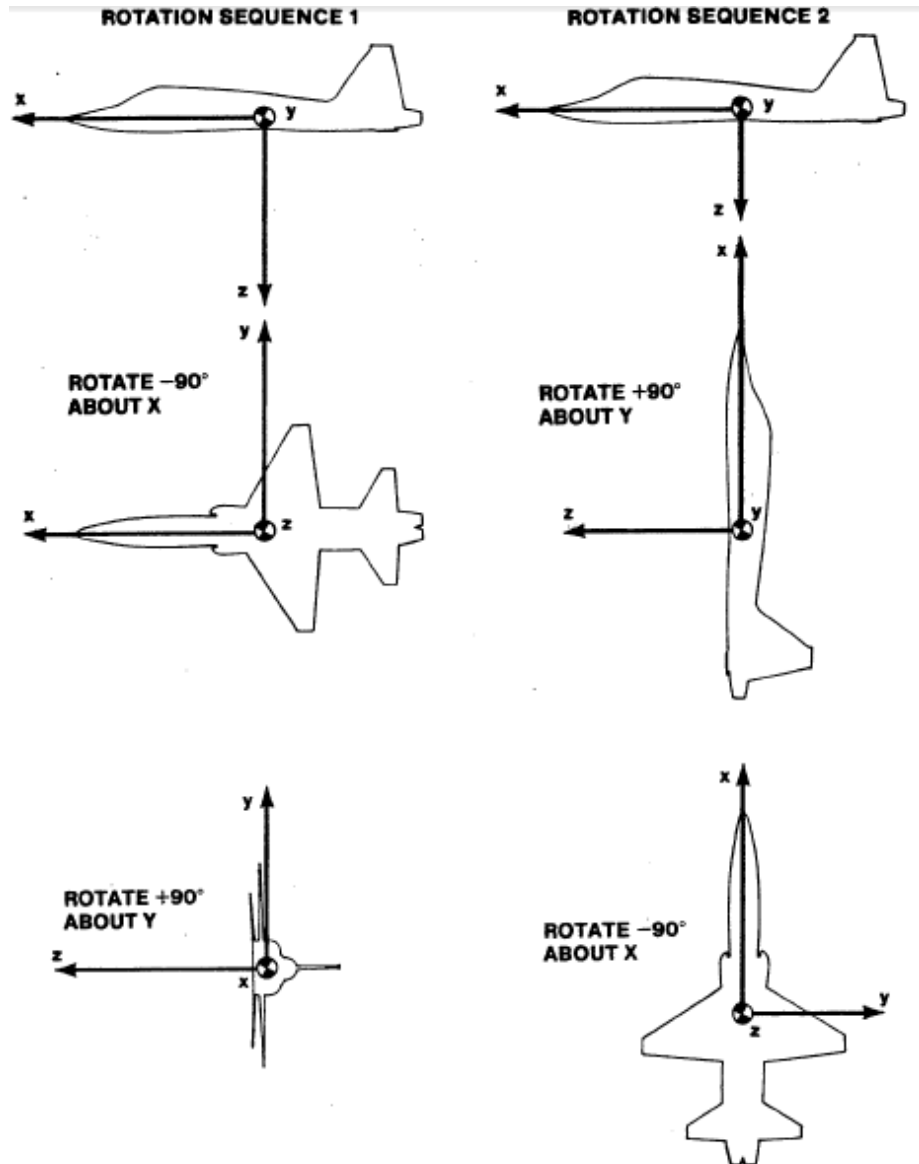
$$-180^\circ \leq \Phi \leq 180^\circ$$

La importancia de la secuencia de rotación de los ángulos de Euler no debe ser exagerado. El desplazamiento finito angular no se comporta como vectores. Sin embargo, si la secuencia es realizada en un orden diferente a Ψ , θ , Φ , el resultado final será diferente. Este factor es claramente ilustrado en la figura (tal), en donde las dos rotaciones son de igual magnitud realizadas alrededor del eje X y Y, pero en un orden opuesto. La adición de una rotación alrededor de un tercer eje no hace nada para mejorar el resultado.

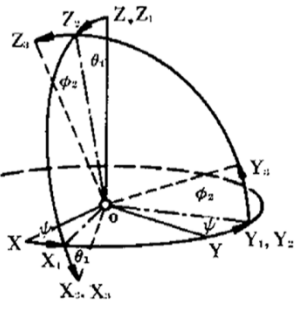
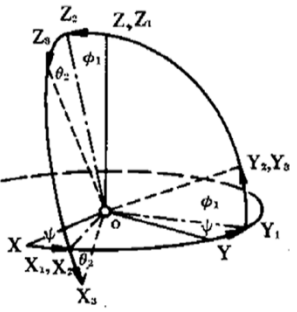
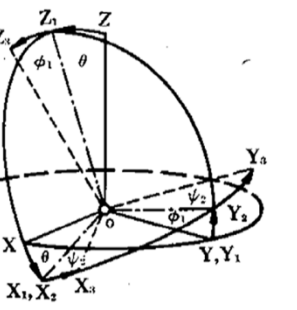
Los ángulos de Euler son muy usados para describir la orientación de vuelo de la aeronave con respecto al espacio inercial. Consecuentemente, las razones angulares en un sistema inercial ($\dot{\Psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\Phi}$) pueden ser transformados a razones angulares para los ejes de

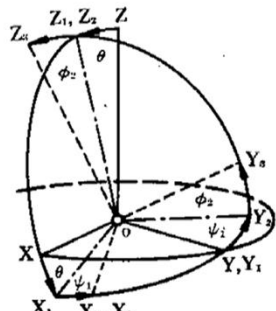
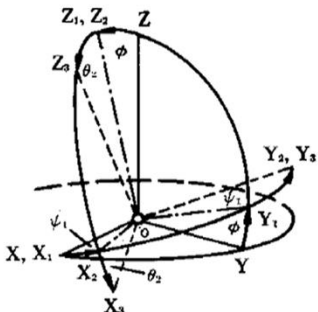
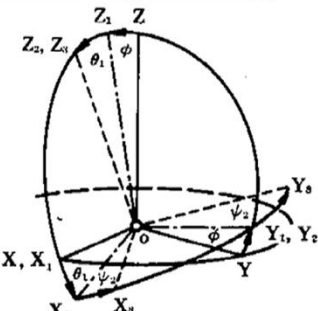
la aeronave (P, Q, R), usando la transformación de los ángulos Euler como se desarrolla en la siguiente subsección.⁶

Figura 2.14 Demostración de que los desplazamientos angulares finitos no se comportan como vectores.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 16.

		VECTOR TRANSFORMATION MATRIX				ANGULAR VELOCITY RELATIONS
CASE 1		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<div>Direct — $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_2 - \dot{\psi} \sin \theta_1$ $\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_1 \cos \phi_2 + \dot{\psi} \sin \phi_2 \cos \theta_1$ $\dot{\psi}_3 = -\dot{\theta}_1 \sin \phi_2 + \dot{\psi} \cos \phi_2 \cos \theta_1$ Inverse — $\dot{\psi} = \dot{\theta}_3 \sin \phi_2 \sec \theta_1 + \dot{\psi}_3 \cos \phi_2 \sec \theta_1$ $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 \cos \phi_2 - \dot{\psi}_3 \sin \phi_2$ $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 \sin \phi_2 \tan \theta_1 + \dot{\psi}_3 \cos \phi_2 \tan \theta_1$</div>
YAW PITCH ROLL ψ, θ_1, ϕ_2		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS				
			INITIAL VECTOR COMPONENTS			
			x	y	z	
		X3	$\cos \theta_1 \cos \psi$	$\cos \theta_1 \sin \psi$	$-\sin \theta_1$	
		Y3	$\sin \phi_2 \sin \theta_1 \cos \psi$ $-\cos \phi_2 \sin \psi$	$\sin \phi_2 \sin \theta_1 \sin \psi$ $+\cos \phi_2 \cos \psi$	$\sin \phi_2 \cos \theta_1$	
		Z3	$\cos \phi_2 \sin \theta_1 \cos \psi$ $+\sin \phi_2 \sin \psi$	$\cos \phi_2 \sin \theta_1 \sin \psi$ $-\sin \phi_2 \cos \psi$	$\cos \phi_2 \cos \theta_1$	
CASE 2		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<div>Direct — $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_1 \cos \theta_2 - \dot{\psi} \cos \phi_1 \sin \theta_2$ $\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2 + \dot{\psi} \sin \phi_1$ $\dot{\psi}_3 = \dot{\phi}_1 \sin \theta_2 + \dot{\psi} \cos \phi_1 \cos \theta_2$ Inverse — $\dot{\psi} = -\dot{\phi}_3 \sec \phi_1 \sin \theta_2 + \dot{\psi}_3 \sec \phi_1 \cos \theta_2$ $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_3 \cos \theta_2 + \dot{\psi}_3 \sin \theta_2$ $\dot{\theta}_2 = \dot{\phi}_3 \tan \phi_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 - \dot{\psi}_3 \tan \phi_1 \cos \theta_2$</div>
YAW ROLL PITCH ψ, ϕ_1, θ_2		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS				
			INITIAL VECTOR COMPONENTS			
			x	y	z	
		X3	$\cos \theta_2 \cos \psi$ $-\sin \phi_1 \sin \theta_2 \sin \psi$	$\cos \theta_2 \sin \psi$ $+\sin \phi_1 \sin \theta_2 \cos \psi$	$-\cos \phi_1 \sin \theta_2$	
		Y3	$-\cos \phi_1 \sin \psi$	$\cos \phi_1 \cos \psi$	$\sin \phi_1$	
		Z3	$\sin \theta_2 \cos \psi$ $+\sin \phi_1 \cos \theta_2 \sin \psi$	$\sin \theta_2 \sin \psi$ $-\sin \phi_1 \cos \theta_2 \cos \psi$	$\cos \phi_1 \cos \theta_2$	
CASE 3		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<div>Direct — $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_1 \cos \psi_2 + \dot{\theta} \cos \phi_1 \sin \psi_2$ $\dot{\theta}_3 = -\dot{\phi}_1 \sin \psi_2 + \dot{\theta} \cos \phi_1 \cos \psi_2$ $\dot{\psi}_3 = -\dot{\theta} \sin \phi_1 + \dot{\psi}_2$ Inverse — $\dot{\theta} = \dot{\phi}_3 \sec \phi_1 \sin \psi_2 + \dot{\theta}_3 \sec \phi_1 \cos \psi_2$ $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_3 \cos \psi_2 - \dot{\theta}_3 \sin \psi_2$ $\dot{\psi}_2 = \dot{\phi}_3 \tan \phi_1 \sin \psi_2 + \dot{\theta}_3 \tan \phi_1 \cos \psi_2 + \dot{\psi}_3$</div>
PITCH ROLL YAW θ, ϕ_1, ψ_2		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS				
			INITIAL VECTOR COMPONENTS			
			x	y	z	
		X3	$\cos \theta \cos \psi_2$ $+\sin \phi_1 \sin \theta \sin \psi_2$	$\cos \phi_1 \sin \psi_2$	$-\sin \theta \cos \psi_2$ $+\sin \phi_1 \cos \theta \sin \psi_2$	
		Y3	$-\cos \theta \sin \psi_2$ $+\sin \phi_1 \sin \theta \cos \psi_2$	$\cos \phi_1 \cos \psi_2$	$\sin \theta \sin \psi_2$ $+\sin \phi_1 \cos \theta \cos \psi_2$	
		Z3	$\cos \phi_1 \sin \theta$	$-\sin \phi_1$	$\cos \phi_1 \cos \theta$	

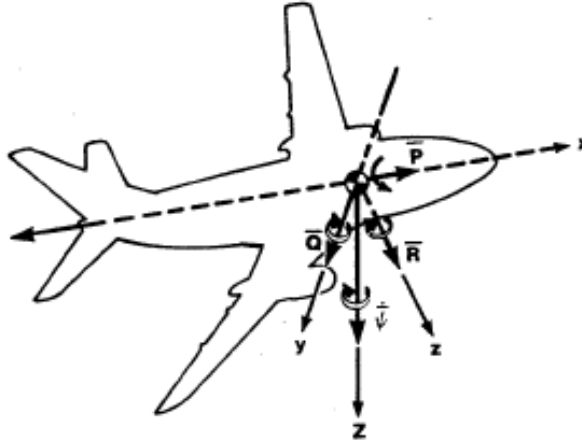
		VECTOR TRANSFORMATION MATRIX				ANGULAR VELOCITY RELATIONS	
CASE 4		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<p>Direct —</p> $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta} \sin \psi_1$ $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta} \cos \phi_2 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_1 \sin \phi_2$ $\dot{\psi}_3 = -\dot{\theta} \sin \phi_2 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_1 \cos \phi_2$ <p>Inverse —</p> $\dot{\theta} = \dot{\theta}_2 \cos \phi_2 \sec \psi_1 - \dot{\psi}_3 \sin \phi_2 \sec \psi_1$ $\dot{\psi}_1 = \dot{\theta}_2 \sin \phi_2 + \dot{\psi}_3 \cos \phi_2$ $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_3 - \dot{\theta}_2 \cos \phi_2 \tan \psi_1 + \dot{\psi}_3 \sin \phi_2 \tan \psi_1$	
PITCH		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS		X	Y		Z
YAW				X3	Y3		Z3
ROLL				X3	Y3		Z3
θ, ψ_1, ϕ_2				X3	Y3		Z3
CASE 5		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<p>Direct —</p> $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta_2 \cos \psi_1 - \dot{\psi}_1 \sin \theta_2$ $\dot{\theta}_2 = -\dot{\phi} \sin \psi_1 + \dot{\theta}$ $\dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \sin \theta_2 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_1 \cos \theta_2$ <p>Inverse —</p> $\dot{\phi} = \dot{\phi}_3 \cos \theta_2 \sec \psi_1 + \dot{\psi}_3 \sin \theta_2 \sec \psi_1$ $\dot{\psi}_1 = -\dot{\phi}_3 \sin \theta_2 + \dot{\psi}_3 \cos \theta_2$ $\dot{\theta} = \dot{\phi}_3 \cos \theta_2 \tan \psi_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_3 \sin \theta_2 \tan \psi_1$	
ROLL		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS		X	Y		Z
YAW				X3	Y3		Z3
PITCH				X3	Y3		Z3
ϕ, ψ_1, θ_2				X3	Y3		Z3
CASE 6		INITIAL VECTOR COMPONENTS				<p>Direct —</p> $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta_1 \cos \psi_2 + \dot{\theta}_1 \sin \psi_2$ $\dot{\theta}_2 = -\dot{\phi} \cos \theta_1 \sin \psi_2 + \dot{\theta}_1 \cos \psi_2$ $\dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \sin \theta_1 + \dot{\psi}_2$ <p>Inverse —</p> $\dot{\phi} = \dot{\phi}_3 \sec \theta_1 \cos \psi_2 - \dot{\theta}_2 \sec \theta_1 \sin \psi_2$ $\dot{\theta}_1 = \dot{\phi}_3 \sin \psi_2 + \dot{\theta}_2 \cos \psi_2$ $\dot{\psi}_2 = -\dot{\phi}_3 \tan \theta_1 \cos \psi_2 + \dot{\theta}_2 \tan \theta_1 \sin \psi_2 + \dot{\psi}_3$	
ROLL		TRANSFORMED VECTOR COMPONENTS		X	Y		Z
PITCH				X3	Y3		Z3
YAW				X3	Y3		Z3
ϕ, θ_1, ψ_2				X3	Y3		Z3

2.1.5.2 Transformación de las razones angulares

Nosotros necesitamos desarrollar la transformación de las razones angulares desde el sistema de ejes de la tierra ($\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$), al sistema de ejes de la aeronave (P, Q, R) para cualquier actitud de la aeronave. El desarrollo es presentado en los siguientes párrafos.

Es fácil observar que cuando la aeronave se encuentra con un movimiento de cabeceo hacia arriba y banqueando, el vector $\dot{\psi}$ tendrá componentes a lo largo del sistema de ejes de cuerpo en X, Y y Z (Figura 2.15). Recordando, $\dot{\psi}$, es la velocidad angular alrededor del eje Z en el sistema de ejes de la tierra (este puede ser a través de la razón de cambio del rumbo de la aeronave). La aeronave debe tener un valor de $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. La manera más sencilla para poder deducir la transformación de las ecuaciones es analizar un vector al mismo tiempo. Primero resolvemos los componentes de $\dot{\psi}$ en el sistema de ejes de cuerpo, realizamos lo mismo para $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$, después se suman los componentes para obtener como toda la transformación.

Figura 2.15 Componentes de $\dot{\psi}$ a lo largo de los ejes x, y y z de cuerpo.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 18.

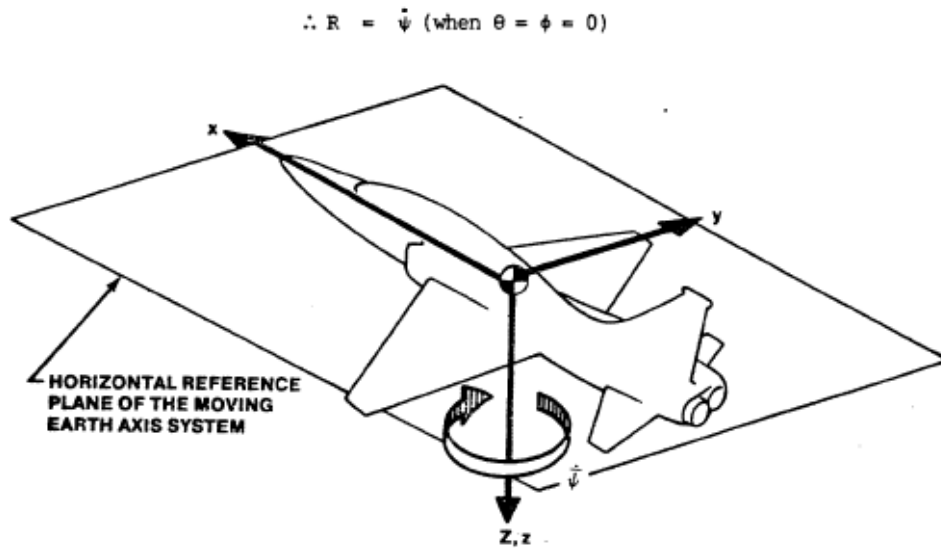
- Paso1: resolver los componentes de $\dot{\psi}$ a lo largo de los ejes de cuerpo para cualquier actitud de la aeronave.

De la figura, se observa ahora que $\dot{\psi}$ se refleja en sistema de ejes de cuerpo para iniciar en la aeronave un vuelo recto y nivelado y cambiar la

aptitud de la aeronave un ángulo al mismo tiempo. Teniendo en cuenta la convención, la secuencia será guiñada, cabeceo y banqueo.

Primero, como lo podemos ver en la figura 2.16, que el eje Z del sistema de ejes de la tierra se encuentra alineado con el eje Z del sistema de ejes de cuerpo independientemente de que los ángulos ψ , θ y ϕ sean cero, sin embargo, $\dot{\psi}$ no afecta P y Q.⁶

Figura 2.16 Velocidad angular de la aeronave con respecto para la razón de guiñada (Rotación $\dot{\psi}$).



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 19.

Lo que sigue, es considerar el cabeceo. En esta aptitud, $\dot{\psi}$ tiene componentes sobre X y Z en el sistema de ejes de cuerpo (Figura 2.17). Como resultado, $\dot{\psi}$ contribuye a las razones angulares alrededor de estos ejes.

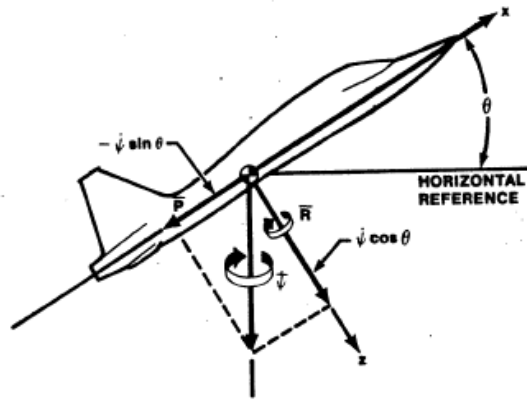
$$P = -\dot{\psi} \sin \theta \quad (2.62)$$

$$R = \dot{\psi} \cos \theta \quad (2.63)$$

El cabeceo en el eje Z permanece perpendicular al eje de cuerpo Y, de tal manera de que Q no es afectado por $\dot{\psi}$ en esta aptitud.

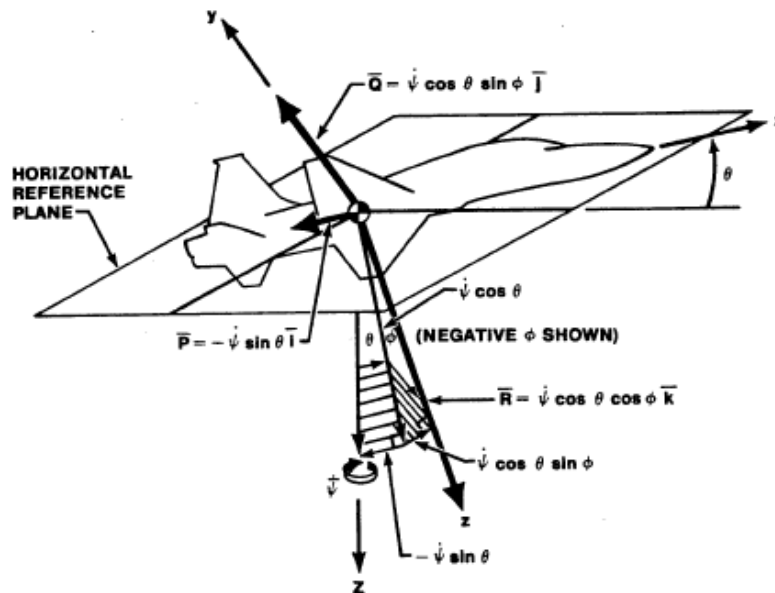
Ahora, el banco de la aeronave, deja el momento de cabeceo como lo indica la figura 2.18.

Figura 2.17 Velocidad angular de la aeronave para la razón de guiñada (Rotación $\dot{\theta}$).



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 20.

Figura 2.18 Velocidad angular de la aeronave para la razón de guiñada (Rotación $\dot{\phi}$).



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 21.

Todos los componentes son ilustrados ahora. Nótese que el movimiento de alabeo no cambia el efecto de $\dot{\psi}$ sobre P. Por lo tanto, los componentes, de $\dot{\psi}$ en el sistema de ejes de cuerpo, para cualquier actitud de la aeronave, para efectos de $\dot{\psi}$:

$$P = -\dot{\psi} \sin \theta \quad (2.64)$$

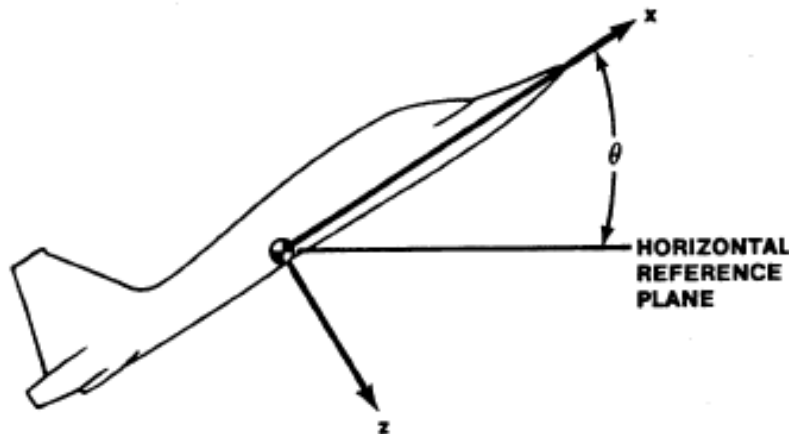
$$Q = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \quad (2.65)$$

$$R = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \quad (2.66)$$

- Paso 2: resolver los componentes de $\dot{\theta}$ a lo largo de los ejes de cuerpo para cualquier actitud de la aeronave.

Recuerde, θ es el ángulo entre el eje X de cuerpo y el horizonte local (Figura 2.19). De nuevo, cambia la actitud de la aeronave por los pasos en la secuencia de la guiñada, cabeceo, y banqueo y analizando los efecto de $\dot{\theta}$.

Figura 2.19 Contribución de la razón de cabeceo a la velocidad angular de la aeronave (Rotación θ).



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, pagina 22.

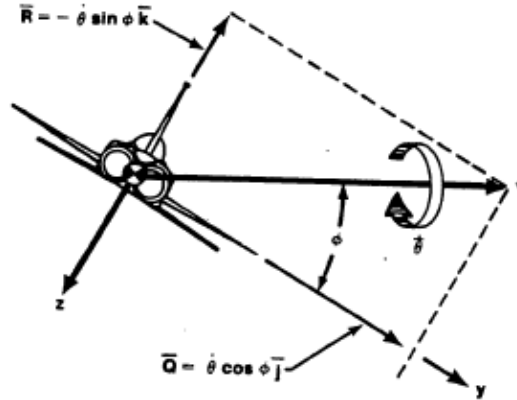
Se puede observar inmediatamente que el ángulo de guiñada no tiene efecto. De igual manera, cuando hay cabeceo, el eje del cuerpo Y

permaneciendo en el plano horizontal. Sin embargo, $\dot{\theta}$ es el mismo Q en esta aptitud y el componente es igual a:

$$Q = \dot{\theta}$$

Ahora el banqueo de la aeronave.

Figura 2.20 Contribución de la razón de cabeceo a la velocidad angular de la aeronave (Rotación ϕ).



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 23.

Puede verse de la anterior figura 2.20, que los componentes de $\dot{\theta}$ sobre el eje de cuerpo son:

$$Q = \dot{\theta} \cos \phi \quad (2.67)$$

$$R = -\dot{\theta} \sin \phi \quad (2.68)$$

Nótese que P no es afectado por $\dot{\theta}$ ya que por definición $\dot{\theta}$ es medido sobre un eje perpendicular al eje X del cuerpo

- Paso 3: Resolver los componentes de $\dot{\phi}$ a lo largo de los ejes de cuerpo.

La razón angular $\dot{\phi}$ es medida a lo largo del eje X del cuerpo. Por lo tanto, $\dot{\phi}$ afecta solo al valor de P , o:

$$P = \dot{\phi} \quad (2.69)$$

Los componentes de $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ a lo largo de los ejes X, Y y Z del cuerpo para cualquier actitud de la aeronave que sea descrita. Ahora pueden ser sumados para obtener la transformación de las ecuaciones.

$$P = (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \vec{i} \quad (2.70)$$

$$Q = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) \vec{j} \quad (2.71)$$

$$R = (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \vec{k} \quad (2.72)$$

Con estas ecuaciones es posible ahora realizar la transformación de las ecuaciones de movimiento escritas en términos de sistema de ejes de cuerpo (U, V, W, P, Q , y R), en términos de movimiento en el sistema inercial (ejes de tierra, U, V, W, ψ, θ y ϕ). En este caso, las ecuaciones resultantes son seis ecuaciones diferenciales no lineales simultáneas de primer orden en U, V y W y de segundo orden en ψ, θ , y ϕ . En orden, describe completamente la trayectoria de la aeronave en coordenadas del sistema inercial, y de manera similar es la transformación para relacionar U, V , y W , velocidades en las coordenadas del sistema inercial.

Las ecuaciones de P y Q son conocidas como las ecuaciones paramétricas y con las seis ecuaciones de movimiento, pueden ser usadas para describir por completo el movimiento de la aeronave.⁶

2.1.5.3 Descomposición inicial de las ecuaciones de la mano izquierda.

En general, las fuerzas y momentos aplicados sobre las ecuaciones del lado izquierdo (LHS), pueden ser divididas de acuerdo a las fuentes mostradas abajo.

		FUENTE				
		AERODINAMICA	EMPUJE	GRAVEDAD	GIROSCOPIO	OTRO
LONGITUDINAL	F_x	X_A	X_T	X_g	0	X_{Otro}
	F_z	Z_A	Z_T	Z_g	0	Z_{Otro}
	G_y	M_A	M_T	0	M_{Giro}	M_{Otro}

Tabla 2-1 Descomposición inicial de las ecuaciones de la mano izquierda

2.1.5.4 Fuerzas aerodinámicas y momentos:

De lejos, lo más importante de las fuerzas y momentos de las ecuaciones del lado izquierdo (LHS) son los términos aerodinámicos.

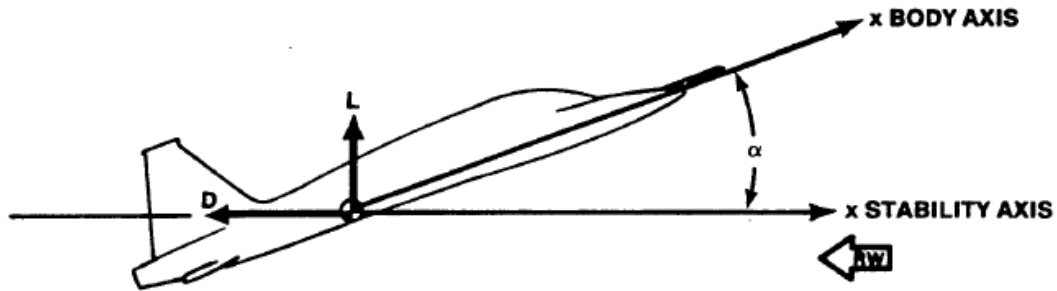
Desafortunadamente estos son demasiado complejos. Como resultado, ciertas suposiciones son hechas y muchos de los términos más pequeños arbitrariamente son excluidos para simplificar el análisis.

2.1.5.4.1 Selección del sistema de ejes

Se consideran solamente las fuerzas sobre una aeronave. Sumando las fuerzas a lo largo del eje de cuerpo x. (Figura 2.21).

$$F_x = L \sin \alpha - D \cos \alpha \quad (2.73)$$

Figura 2.21 Elección del sistema de ejes.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 39.

Nótese que si las fuerzas fueran sumadas a lo largo del eje de estabilidad x_s , esto podría ser.

$$F_x = -D \quad (2.74)$$

Estas cosas se podrían simplificar si el eje de estabilidad fuera usado para el desarrollo de las fuerzas aerodinámicas. Al suponer un ángulo pequeño se permite hacer lo siguiente.

$$\cos \alpha \cong 1$$

$$\sin \alpha \cong 0$$

Usando esta suposición, la ecuación (73) se reduce a la ecuación (74).

Cabe señalar que la sustentación y la resistencia son definidas para que sean positivos como se ilustra. Por lo tanto estas cantidades tienen un sentido negativo con respecto al sistema de ejes de estabilidad.

Los términos aerodinámicos serán desarrollados usando el sistema de ejes de estabilidad de modo que las ecuaciones asumen la forma de.

$$\begin{aligned} \text{Arrastre} &= -D + X_T + X_g + X_{otr} \\ &= m(\dot{U} + QW - RV) \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \text{Sustentacion} &= -L + Z_T + Z_g + Z_{otr} \\ &= m(\dot{W} + PV - QU) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \text{Cabeceo } M_A + M_T + M_{giro} + M_{otr} \\ &= \dot{Q}I_y - PR(I_z - I_x) + (P^2 - R^2)I_{xz} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \text{Fuerza Lateral } Y_A + Y_T + Y_g + Y_{otr} \\ &= m(\dot{V} + PV + PW) \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \text{Alabeo } L_A + L_T + L_{giro} + L_{otr} \\ &= \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \text{Guiñada } N_A + N_T + N_{giro} + N_{otr} \\ &= \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) + (QR - \dot{P})I_{xz} \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.1.5.4.2 Expansión de los términos aerodinámicos

Un análisis de estabilidad y control se refiere de qué forma responde un vehículo a una perturbación de entrada. Por ejemplo, el elevador arriba causara que la nariz se levante, o por turbulencias se causa un deslizamiento lateral, la aeronave deberá alinearse a sí misma con el viento relativo. Intuitivamente, los términos aerodinámicos tienen el mayor efecto sobre el resultado del movimiento de la aeronave. Desafortunadamente las anteriores ecuaciones (que resultan de la sumatoria de fuerzas y momentos), son no lineales, y sus soluciones

exactas son imposibles. En vista de la complejidad del problema, la linealización de las ecuaciones propone simplificaciones especialmente deseables. El modelo linealizado está basado en la suposición de pequeñas perturbaciones y la teoría de pequeñas perturbaciones. No obstante este modelo da resultados bastante adecuados para propósitos de ingeniería sobre un amplio rango de aplicaciones; porque los principales efectos aerodinámicos son prácticamente funciones lineales de las variables de interés y porque grandes perturbaciones en vuelo pueden corresponder a pequeñas perturbaciones, relativas a velocidades angulares y lineales.

2.1.5.4.3 Teoría de pequeñas perturbaciones

La teoría de pequeñas perturbaciones se basa en una simple técnica utilizada para linealizar un conjunto de ecuaciones diferenciales. En la dinámica de vuelo de aeronaves, las fuerzas aerodinámicas y momentos son asumidos para ser funciones de los valores instantáneos, de las velocidades de perturbación, de la deflexión de las superficies de control y de sus derivadas. Ellas son obtenidas en la forma de una serie de Taylor en estas variables, y las expresiones son linealizadas para excluir todos los términos de más alto orden. Para entender completamente la derivación, algunas suposiciones y definiciones deben ser primero establecidas.⁶

Suposición de pequeñas perturbaciones: En resumen las principales variables que afectan las características aerodinámicas de un cuerpo rígido o un vehículo, se dan abajo.

1. Velocidad, temperatura y altitud: Estas variables pueden ser consideradas directamente o indirectamente funciones del número Mach, número de Reynolds y presión dinámica. La velocidad puede resolverse dentro de las componentes U , V y W a lo largo de los ejes de cuerpo del vehículo.
2. Angulo de ataque α , ángulo de deslizamiento lateral β : Estas variables pueden ser usadas con la magnitud de la velocidad total V_T , para expresar las componentes ortogonales de velocidad U , V y W . Es más conveniente expresar la variación de las características de fuerzas y momentos con estos ángulos como

variables independientes mejor que con los componentes de velocidad.

3. Velocidad angular: Esto es usualmente solucionado dentro de los componentes, P, Q y R alrededor de los ejes de cuerpo del vehículo.
4. Deflexión de las superficies de control: Estas son usadas fundamentalmente para el cambio o balance de las fuerzas aerodinámicas y momentos y se representan por δ_e , δ_a , δ_r (deflexión del elevador, alerón y rudder respectivamente).

Porque el aire tiene masa, el campo del flujo no puede ajustarse instantáneamente a los cambios repentinos en estas variables y existen condiciones transitorias. En algunos casos esos efectos transitorios vienen siendo significativos. El análisis de cierto movimiento inestable por lo tanto puede requerir considerar las derivadas con respecto al tiempo de las variables listadas abajo.

En otras palabras:

		Variable			Primera Derivada			Segunda Derivada		
D L M_A Y_A L_A N_A	Son función de	U	α	β	\dot{U}	$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	\ddot{U}	$\ddot{\alpha}$	$\ddot{\beta}$
		P	Q	R	\dot{P}	\dot{Q}	\dot{R}	\ddot{P}	\ddot{Q}	\ddot{R}
		δ_e	δ_a	δ_r	$\dot{\delta}_e$	$\dot{\delta}_a$	$\dot{\delta}_r$	$\ddot{\delta}_e$	$\ddot{\delta}_a$	$\ddot{\delta}_r$
		ρ	M	R_e	T	Se asume como constante			-----	

Tabla 2-2 Lista de variables.

Esta lista puede ser reducida a proporciones factibles mediante la suposición de que el movimiento del vehículo consiste solamente de pequeñas desviaciones desde alguna condición inicial de referencia. En adición, las expansiones de las series de Taylor con términos de alto orden se desprecian, se utilizó para determinar los efectos de estas pequeñas perturbaciones sobre la aeronave. Afortunadamente, esta suposición de pequeñas perturbaciones se aplica a muchos casos de

interés práctico y como un extra, las derivadas y parámetros de estabilidad se derivan bajo esta suposición.

Las variables se consideran que constan de algunos valores de equilibrio más un cambio incremental, llamado el "valor de perturbación". la notación para estos valores de perturbación es:

$$P = P_0 + p$$

$$U = U_0 + u$$

En resumen, la suposición de pequeñas perturbaciones es aplicada en tres pasos:

Se asume una condición inicial (en equilibrio), se asume que el movimiento del vehículo consiste en una pequeña perturbación alrededor de esta condición y utilizando una expansión de las series de Taylor de primer orden para determinar los efectos de estas pequeñas perturbaciones.

Como una consecuencia adicional, la suposición de pequeñas perturbaciones permite desacoplar las ecuaciones longitudinales de las latero-direccionales.

Ecuaciones longitudinales y latero-direccionales: Estas han sido encontradas por la experiencia propia, cuando se opera bajo la suposición de pequeñas perturbaciones, el movimiento del vehículo puede ser pensado como dos movimientos independientes (desacoplados), cada uno de los cuales es una función de las variables mostradas abajo.

1. Movimiento Longitudinal

$$(D, L, M_A) = f(U, \alpha, \dot{\alpha}, Q, \delta_e) \quad (2.81)$$

2. Movimiento Latero-Direccional

$$(Y_A, L_A, N_A) = f(\beta, \dot{\beta}, P, R, \delta_A, \delta_r) \quad (2.82)$$

Las ecuaciones son agrupadas y nombradas de la manera como se mostró anteriormente, debido a que las variables de estado del primer grupo $U, \alpha, \dot{\alpha}, Q, \delta_e$ son conocidas como las variables longitudinales y esas del segundo grupo $\beta, \dot{\beta}, P, R, \delta_A, \delta_r$ son conocidas como variables latero-direccionales. Con la convencional hipótesis de simplificación, las variables longitudinales y latero-direccionales aparecerán explícitamente solo sus respectivos grupos. Esta separación también será mostrada en términos de fuerzas aerodinámicas y momentos y las ecuaciones se desacoplarán completamente dentro de estos dos conjuntos independientes.

Condiciones Iniciales: Como se ha indicado al principio, se asumirá que el movimiento se compone de pequeñas perturbaciones alrededor de alguna condición inicial de equilibrio. La condición se asumirá como un vuelo simétrico, recto y estable. Esta condición es una combinación de los siguientes movimientos.

Vuelo Estable: Movimiento con cero razón de cambio en las componentes de las velocidades lineales y angulares. Por ejemplo.

$$\dot{U} = \dot{V} = \dot{W} = \dot{P} = \dot{Q} = \dot{R} = 0$$

Vuelo Recto: Movimiento con cero en las componentes de la velocidad angular, P, Q y $R = 0$.

Vuelo Simétrico: Movimiento en el cual el plano de simetría del vehículo permanece fijo en el espacio a través de la maniobra. Las variables asimétricas P, R, V, Φ y β son todas cero en el vuelo simétrico. Algunas condiciones del vuelo simétrico son, wings-level dives, acenso y pull-ups sin deslizamiento lateral. En el vuelo simétrico, recto y estable, para la aeronave este volando con las alas niveladas todas las componentes de velocidad se asumen cero excepto U_0 y W_0 . Por consiguiente, con referencia a los ejes de cuerpo

$$V_T \cong U_0 \cong \text{constante}$$

$$W_0 \cong \text{constante pequeña} \therefore \alpha_0 \cong \text{constante pequeña}$$

$$V_0 \cong 0 \therefore \beta_0 \cong 0$$

$$P_0 \cong Q_0 \cong R_0 \cong 0$$

Ya se ha encontrado que las ecuaciones de movimiento se simplifican considerablemente cuando es usado los ejes de estabilidad como ejes de referencia. Esta idea se empleara nuevamente y la última serie de condiciones de contorno resultaran. Por lo tanto

Suposición

$$V_T \cong U_0 \cong \textit{constante}$$

$$W_0 \cong 0 \therefore \alpha_0 \cong 0$$

$$V_0 \cong 0 \therefore \beta_0 \cong 0$$

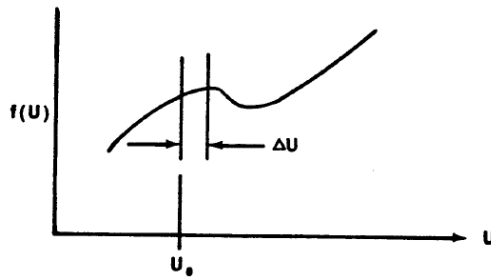
$$P_0 \cong Q_0 \cong R_0 \cong 0$$

(ρ , M , Re , configuración de la aeronave) = constantes

Expansión por las Series de Taylor: Como se ha indicado al principio, las ecuaciones resultantes de la sumatoria de fuerzas y momentos son no lineales y la solución exacta no es obtenible. Una solución aproximada es encontrada mediante la linealización de estas ecuaciones usando la expansión de las Series de Taylor y dejando a un lado los términos de más alto orden.

Como una introducción a esta técnica, se asume alguna función arbitraria no lineal $F(U)$, teniendo la representación gráfica mostrada en la gráfica 2.1.

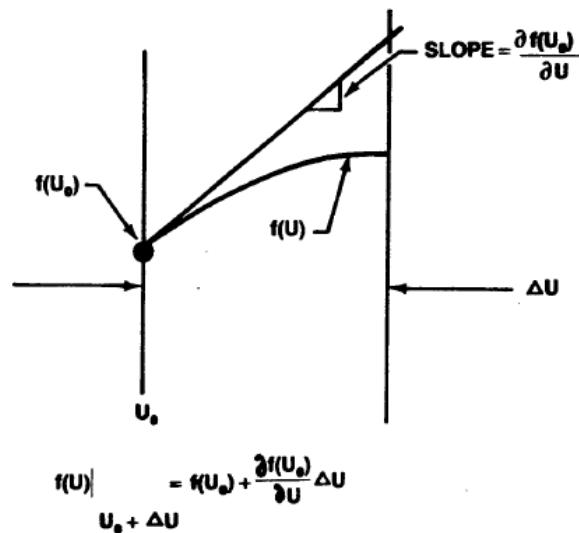
Grafica 2.1 Aproximación de una función arbitraria por series de Taylor.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 44.

Una expansión de las Series de Taylor aproximara la curva sobre un periodo corto, ΔU . La primera derivada asume la función entre ΔU para que sea una línea recta con la pendiente $\partial f(U_0)/\partial U$. Esta aproximación es mostrada en la grafica2.2.

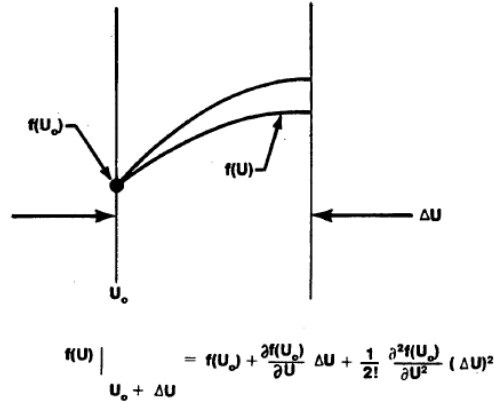
Grafica 2.2 Aproximación de primer orden por series de Taylor.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 45.

Para matizar la exactitud de la aproximación, el término de una segunda derivada es adicionado. La aproximación de segundo orden es mostrado en la figura 2.3.

Grafica 2.3 Aproximación de segundo orden por series de Taylor.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 4, pagina 45.

Una exactitud adicional puede ser obtenida por la adición de derivadas de más alto orden. El resultado de la expansión de las Series de Taylor tiene la forma de:

$$f(U)|_{U_0 + \Delta U} = f(U_0) + \frac{\partial f(U_0)}{\partial U} \Delta U + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(U_0)}{\partial U^2} (\Delta U)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f(U_0)}{\partial U^3} (\Delta U)^3 + \dots \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(U_0)}{\partial U^n} (\Delta U)^n \quad (2.83)$$

Si se hace ΔU lo más pequeño, la exactitud se incrementara y los términos de más alto orden pueden ser no tomados en cuenta sin que signifique en error. También desde que ΔU sea pequeña. $(\Delta U)^2$, $(\Delta U)^3$, $(\Delta U)^n$, son muy pequeñas. Por lo tanto para los valores de pequeñas perturbaciones de U , la función puede ser exactamente aproximada por:

$$f(U)|_{U_0 + \Delta U} = f(U_0) + \frac{\partial f(U_0)}{\partial U} \Delta U \quad (2.84)$$

Ahora se podrán linealizar las fuerzas aerodinámicas y los momentos utilizando esta técnica. Para recordar, el termino sustentación del

conjunto de ecuaciones longitudinales se ilustra como ($L = -F_z$). Desde la ecuación (84) se vio que el lift fue una función de $U, \alpha, \dot{\alpha}, Q, \delta_e$. Por consiguiente la expansión de la Serie de Taylor para el lift es:

$$L = \left[\begin{array}{l} L_0 + \frac{\partial L}{\partial U} \Delta U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial U^2} \Delta U^2 + \dots \\ + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \Delta \alpha^2 + \dots \\ + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\alpha}^2} \Delta \dot{\alpha}^2 + \dots \\ + \frac{\partial L}{\partial Q} \Delta Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial Q^2} \Delta Q^2 + \dots \end{array} \right] \quad (2.85)$$

Donde $L_0 = L(U_0, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, Q_0)$

En la teoría de pequeñas perturbaciones, cada una de las variables es expresada como como la suma de un valor inicial más el valor de una pequeña perturbación. Por ejemplo.

$$U = U_0 + u, \text{ donde } u = \Delta U = U - U_0 \quad (2.86)$$

Y

$$\frac{\partial u}{\partial U} = \frac{\partial (U - U_0)}{\partial U} = \frac{\partial U}{\partial U} - \frac{\partial U_0}{\partial U} = 1 \quad (2.87)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (2.88)$$

Y

$$\Delta U = u$$

El segundo término de la expresión en la ecuación (85) luego se convierte en.

$$\frac{\partial L}{\partial U} \Delta U = \frac{\partial L}{\partial u} u \quad (2.89)$$

Similarmente

$$\frac{\partial L}{\partial Q} \Delta Q = \frac{\partial L}{\partial q} q \quad (2.90)$$

Y todos los otros términos que siguen. También se elige para dejar $\alpha = \Delta\alpha, \dot{\alpha} = \Delta\dot{\alpha}$. Quitando los términos involucrados de más alto orden u^2, q^2 , etc. La ecuación (85) ahora se convierte en

$$L = L_0 + \frac{\partial L}{\partial u} u + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q} q \quad (2.91)$$

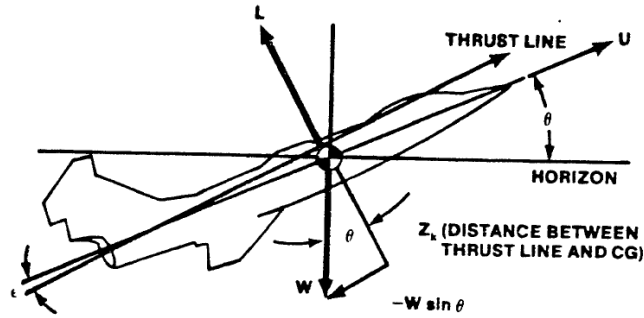
Este desarrollo puede ser aplicado para todas las fuerzas aerodinámicas y momentos. Las ecuaciones son lineales y se tienen cuenta todas las variables que tienen un efecto significativo sobre las fuerzas aerodinámicas y momentos de la aeronave.

Las ecuaciones que resultan de este desarrollo ahora pueden ser sustituidas dentro de las ecuaciones de movimiento del lado izquierdo (LHS).

2.1.5.5 Fuerza de Gravedad

La gravedad actúa a través del centro de gravedad de una aeronave y como resultado no tiene efectos sobre los momentos de la aeronave. Esto afecta la ecuación de fuerza como se muestra en la figura 2.22. Para el movimiento longitudinal, solamente la variable a considerar es θ .

Figura 2.22 Origen de los efectos de peso y empuje sobre fuerzas y momentos.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 4, página 48.

Por ejemplo se consideran los efectos del peso sobre el eje x

$$X_g = -mg \sin \theta \quad (2.92)$$

Desde que m y g sean consideradas constantes, θ es solamente una variable relevante. Por lo tanto, la expansión del termino de gravedad X_g , puede ser expresado utilizando la hipótesis de pequeñas perturbaciones, tal como

$$X_g = X_{g_0} + \frac{\partial X_g}{\partial \theta} \theta \quad (X_{g_0} = \text{condicion de equilibrio de } X_g) \quad (2.93)$$

Para simplificar, el término X_g será referido como la resistencia debido al peso, (D_{wt}). Esto se incorpora a la suposición de un ángulo pequeño que fue hecha en el desarrollo de los términos aerodinámicos; sin embargo, este efecto no es tomado en cuenta.

Por lo tanto, La ecuación (93) se convierte en

$$D_{wt} = D_{0_{wt}} + \frac{\partial D_{wt}}{\partial \theta} \theta \quad (2.94)$$

Igualmente, la fuerza en z puede ser expresada como la sustentación negativo debido al peso (L_{wt}), y el término expandido se convierte en

$$L_{wt} = L_{0_{wt}} + \frac{\partial L_{wt}}{\partial \theta} \theta \quad (2.95)$$

Estas componentes de las ecuaciones relacionan los efectos de la gravedad a las ecuaciones de movimiento y pueden ser sustituidas dentro de las ecuaciones de la mano izquierda (LHS).

2.1.5.6 Ecuaciones del lado izquierdo (LHS) expandidas

Utilizando el desarrollo previo, las ecuaciones del lado izquierdo (LHS) se convierten en:

$$\begin{aligned} \text{"ARRASTRE"} \quad & - \left[D_0 + \frac{\partial D}{\partial u} u + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial D}{\partial q} q \right] \\ & - \left[D_{0_{wt}} + \frac{\partial D_{wt}}{\partial \theta} \theta \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \text{"SUSTENTACION"} \quad & - \left[L_0 + \frac{\partial L}{\partial u} u + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q} q \right] \\ & + \left[L_{0_{wt}} + \frac{\partial L_{wt}}{\partial \theta} \theta \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \text{"CABECEO"} \quad & \left[M_{A_0} + \frac{\partial M_A}{\partial u} u + \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial M_A}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{\partial M_A}{\partial q} q \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

2.1.6 Ecuaciones de la mano derecha (RHS) en términos de pequeñas perturbaciones

Para conformidad con la expansión de las series de las ecuaciones del lado izquierdo (LHS), las ecuaciones (RHS) también deben ser expresadas en términos de pequeñas perturbaciones. Se recuerda que cada variable es expresada como la suma de un valor en equilibrio más el valor de una pequeña perturbación ($U = U_0 + u$, $Q = Q_0 + q$, etc). Estas

expresiones pueden ser sustituidas directamente dentro de la totalidad del conjunto de ecuaciones de (RHS) ecuaciones de la (23 a la 25) y de la (59 a la 61). Como ejemplo la ecuación de sustentación (dirección z de la ecuación longitudinal) será expandida. Empezando con la ecuación (25)

$$F_z = m(\dot{W} + PV - QU) \quad (2.99)$$

Se sustituye el valor inicial más el de perturbación para cada variable

$$F_z = m[\dot{W}_0 + \dot{w} + (P_0 + p)(V_0 + v) - (Q_0 + q)(U_0 + u)] \quad (2.100)$$

Multiplicando cada término exterior produce

$$F_z = m[\dot{W}_0 + \dot{w} + P_0V_0 + pV_0 + P_0v + pv - Q_0U_0 - qU_0 - Q_0u - qu] \quad (2.101)$$

Aplicando el límite de condición, simplifica la ecuación a

$$F_z = m[\dot{w} + pv - qU_0 - qu] = m[\dot{w} + pv - q(U_0 + u)] \quad (2.102)$$

O,

$$F_z = m[\dot{w} + pv - qu] \quad (2.103)$$

Utilizando esta misma técnica, el conjunto de ecuaciones de (RHS) se convierte en:

LONGITUDINAL

$$"ARRASTRE" : m[\dot{u} + qw - rv] \quad (2.104)$$

$$"SUSTENTACION" : m[\dot{w} + pv - qU] \quad (2.105)$$

$$"CABECEO": \dot{q}I_y - pr(I_z - I_x) + (p^2 - r^2)I_{xz} \quad (2.106)$$

Las cuales son válidas para pequeñas perturbaciones alrededor de una condición de equilibrio de un vuelo simétrico, recto y estable.

2.1.7 Reducción de las ecuaciones a una forma usable.

2.1.7.1 Normalización de las ecuaciones

Para colocar las expresiones linealizadas dentro de una forma más usable, cada ecuación es multiplicada por un "factor de normalización". Este factor es diferente para cada ecuación y es escogido para simplificar el primer término sobre las ecuaciones de la RHS. Se desea que el primer término de las RHS tenga, ya sea aceleraciones ($\dot{u}, \dot{p}, \dot{q}, o \dot{r}$), o razón angular ($\dot{\alpha}$ o $\dot{\beta}$) y estos términos fueron previamente identificados en las ecuaciones (81 y 82) como variables longitudinales o latero-direccionales. Como ya se mostro

$$\alpha \cong \frac{W}{V_T} \quad (2.107)$$

Y

$$\sin \beta = \frac{V}{V_T} \quad (2.108)$$

Desde que se asume $V_T \cong U_0$ y $V_0 \cong W_0 \cong 0$, se tiene

$$\dot{\alpha} \cong \frac{\dot{w}}{U_0} \quad (2.109)$$

$$\dot{\beta} \cong \frac{\dot{v}}{U_0} \quad (2.110)$$

La tabla (1) muestra los factores de normalización y las ecuaciones de movimiento posteriores.

Ecuación	Factor de normalización	Aceleración /Razón angular	Unidades
Arrastre	$\frac{1}{m}$	$-\frac{D}{m} + \frac{X_T}{m} + \dots = \ddot{u}$	$\frac{m}{seg^2}$
Sustentación	$\frac{1}{m u_0}$	$-\frac{L}{m u_0} + \frac{Z_T}{m u_0} + \dots = \ddot{\alpha}$	$\frac{rad}{seg}$
Cabeceo	$\frac{1}{I_y}$	$\frac{M_A}{I_y} + \frac{M_T}{I_y} + \dots = \ddot{q}$	$\frac{rad}{seg^2}$

Tabla 2-3 Factores de normalización.

2.1.7.2 Parámetros de Estabilidad

Los parámetros de estabilidad son cantidades que expresan la variación de las fuerzas o momentos sobre la aeronave causados por una perturbación desde el vuelo estable. Ellos son simplemente coeficientes parciales ($\partial L / \partial u$, etc.) Multiplicados por su respectivo factor de normalización. Ellas expresan la variación de las fuerzas o momentos causados por una perturbación desde el estado estable. Los parámetros de estabilidad son importantes porque ellos pueden ser usados directamente como coeficientes numéricos en un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas describiendo la dinámica de la estructura de un avión. Para demostrar su desarrollo, Se toman en cuenta los términos aerodinámicos de la ecuación de sustentación. Al multiplicar la ecuación (2.91) por el factor de normalización $1/mU_0$, se obtiene.

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{mU_0} = \frac{L_0}{mU_0} + \underbrace{\frac{1}{mU_0} \frac{\partial L}{\partial u} u}_{L_u u} + \underbrace{\frac{1}{mU_0} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \alpha}_{L_\alpha \alpha} + \underbrace{\frac{1}{mU_0} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha}}_{L_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}} \\
 + \underbrace{\frac{1}{mU_0} \frac{\partial L}{\partial q} q}_{L_q q} \left[\frac{rad}{seg} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.111}$$

Las cantidades indicadas son definidas como parámetros de estabilidad y las ecuaciones se convierten en:

$$\frac{L}{mU_0} = \frac{L_0}{mU_0} + L_u u + L_\alpha \alpha + L_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + L_q q \left[\frac{rad}{seg} \right] \quad (2.112)$$

Los parámetros de estabilidad tienen varias dimensiones dependiendo de si ellas son multiplicadas por una velocidad lineal, un ángulo o una razón angular. Por ejemplo:

$$L_u \left[\frac{1}{ft} \right] u \left[\frac{ft}{seg} \right] = \left[\frac{rad}{seg} \right]$$

$$L_\alpha \left[\frac{1}{seg} \right] \alpha [rad] = \left[\frac{rad}{seg} \right]$$

$$L_{\dot{\alpha}} [nada] \dot{\alpha} \left[\frac{rad}{seg} \right] = \left[\frac{rad}{seg} \right]$$

Estos parámetros de estabilidad son algunas veces llamados "derivadas dimensionales" o "parámetros de derivadas de estabilidad", pero se reservara la palabra "derivada" para indicar la forma no dimensional la cual puede ser obtenida mediante reordenamiento.

2.1.7.3 Simplificación de las Ecuaciones

Por la combinación de todos los términos derivados hasta el momento, las ecuaciones resultantes son un poco extensas. En principio para economizar esfuerzos, muchas simplificaciones pueden ser hechas. Para una, todos los términos que contengan "pequeños efectos" pueden ser ignorados. Normalmente estos términos son de menor magnitud que los términos más predominantes.

Estas y otras simplificaciones ayudaran a deducir un conjunto de ecuaciones factibles y concisas.

2.1.7.4 Ecuaciones Longitudinales

2.1.7.4.1 Ecuación de Arrastre:

La completa ecuación de Resistencia normalizada es:

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\left[\frac{D_0}{m} + D_u u + D_\alpha \alpha + D_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + D_q q \right]}_{\text{terminos aerodinamicos}} - \underbrace{\left[\frac{D_{0_{wt}}}{m} + D_\theta \theta \right]}_{\text{terminos gravitatorios}} \\
& = \dot{u} + qw - rv
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Suposiciones de simplificación

1. $-D_0/m - D_{0_{wt}}/m \cong 0$ Estado estacionario, sumatoria cero (empuje)
2. RPM constantes, $\partial T / \partial u$ es pequeña (empuje)
3. $rv \cong 0$ (La hipótesis de pequeñas perturbaciones permite analizar el movimiento longitudinal independiente del latero-direccional)
4. $qw \cong 0$ (orden de magnitud)
5. $D_{\dot{\alpha}}$ y D_q son todas muy pequeñas, esencialmente cero.

La ecuación resultante es:

$$- [D_\alpha \alpha + D_u u + D_\theta \theta] = \dot{u} \tag{2.114}$$

Reorganizando

$$- [\dot{u} + D_\alpha \alpha + D_u u + D_\theta \theta] = SC \tag{2.115}$$

2.1.7.4.2 Ecuación de Sustentación:

La completa ecuación de sustentación es:

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\left[\frac{L_0}{mU_0} + L_u u + L_\alpha \alpha + L_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + L_q q \right]}_{\text{terminos aerodinamicos}} + \underbrace{\left[\frac{L_{0_{wt}}}{mU_0} + L_\theta \theta \right]}_{\text{terminos gravitatorios}} \\
& = \dot{\alpha} + \frac{pv - qu}{U_0}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Suposiciones de simplificación

1. $-L_0/m - L_{0_{wt}}/m \cong 0$ Estado estacionario
2. RLPM constantes, $\partial T/\partial u$ es pequeña (empuje)
3. $L_\theta \theta \cong 0$ (Orden de magnitud para θ pequeña)
4. $pv \cong 0$ (sin movimiento latero-direccional)
5. $\frac{qu}{u_0} \cong q$ ($U \cong U_0$)

La ecuación resultante es:

$$-[L_\alpha \alpha + L_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + L_u u + L_q q] = \dot{\alpha} - q \quad (2.117)$$

Reorganizando

$$-L_\alpha \alpha - (1 + L_{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha} - L_u u + (1 - L_q) q = SC \quad (2.118)$$

2.1.7.4.3 Ecuación de Momento de Cabeceo.

$$\begin{aligned} \frac{M_{A_0}}{I_y} + M_{A_\alpha} \alpha + M_{A_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + M_{A_u} u + M_{A_q} q \\ = \dot{q} - pr \frac{(I_z - I_x)}{I_y} + \frac{(p^2 - r^2)}{I_y} I_{xz} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Esta puede ser simplificada como antes (usando las suposiciones de simplificación). Luego

$$\dot{q} - M_\alpha \alpha - M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - M_u u - M_q q = SC \quad (2.120)$$

Ahora se tienen tres ecuaciones longitudinales con las que son fáciles de trabajar. Nótese que hay cuatro variables, θ , α , u y q , pero solamente tres ecuaciones. Para resolver este problema, θ puede ser sustituido por q :

$$q = \dot{\theta}, y \dot{q} = \ddot{\theta}$$

2.1.8 Ecuaciones de movimiento en forma de parámetros de estabilidad.

Utilizando subsección previa, las ecuaciones de movimiento se reducen a lo siguiente en forma de parámetros de estabilidad.

Ecuaciones longitudinales

$$(\theta)(u)(\alpha)$$

$$\begin{array}{llll} \text{"DRAG"} & -D_\theta \theta & -\dot{u} - D_u u & -D_\alpha \alpha \\ = SC & & & \end{array} \quad (2.121)$$

$$\begin{array}{llll} \text{"LIFT"} & (1 - L_q)\dot{\theta} & -L_u u & -(1 + L_{\dot{\alpha}})\dot{\alpha} - L_\alpha \alpha \\ = SC & & & \end{array} \quad (2.122)$$

$$\begin{array}{llll} \text{"PITCH"} & \ddot{\theta} - M_q \dot{\theta} & -M_u u & -M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - M_\alpha \alpha \\ = SC & & & \end{array} \quad (2.123)$$

2.2 Momentos de inercia

Cuando desarrollamos modelos matemáticos para la obtención de los momentos de inercia de un UAS sobre sus tres ejes, no se hallan con cierta facilidad y exactitud. Para el cálculo del momento de inercia de una aeronave por partes individuales, resulta un método impráctico, inadecuado y equívocos, debido a que existen muchas piezas demasiado pequeñas y ligeras y distancias demasiadas cortas que se generan en diferentes puntos de la aeronave proveyendo valores para el momento de inercia en general inexactos. Por ese motivo, se emplean pruebas prácticas para determinarlo de una manera más precisa. Cualquier cambio que ocurra en la inercia del modelo debe ser por la adición o la sustracción del equipamiento o de la estructura, podrían calcularse con posterioridad.

El significado de momento de inercia es la capacidad resistiva que tiene un cuerpo respecto a una aceleración rotativa y puede ser calculada tomando la masa de cada parte de la aeronave y su distancia al cuadrado hasta el centro de gravedad de la misma. Existen dos métodos aproximados para hallar el momento de inercia experimentalmente, en cada método se emplea el principio del péndulo compuesto. Un método implica colgar el modelo a un solo punto, suspendido por dos cuerdas o alambres, cada uno situado por delante y detrás del centro de gravedad, obviamente estos tres puntos ubicados sobre el mismo eje. Otra técnica

es hacer que el centro de gravedad del modelo sea así mismo un punto de pivote. La fricción en el punto de pivote se asume como cero. Después se empuja el modelo en la dirección apropiada y al mismo tiempo cronometrando estas oscilaciones. El periodo oscilatorio (T) es determinado tomando la cantidad de tiempo en segundos y dividirlo por el total de números de ciclos (un ciclo es una oscilación completa, de un lado para otro). Es necesario mencionar que de una gran cantidad de número de ciclos (al menos 20 o 30) y la longitud de cuerda de la suspensión sea amplia, hace que el cronometraje provea valores más exactos, que es de vital importancia.¹⁸

El método para determinar el momento de inercia a través del péndulo compuesto consiste en determinar el periodo de oscilación para dos suspensiones, midiendo las diferencias entre las dos longitudes de suspensión, y resolver las ecuaciones para las dos suspensiones simultáneamente para una longitud de suspensión. La solución de estas ecuaciones determina la localización del centro de gravedad de la aeronave inmediatamente. El momento virtual de inercia es luego hallada por la intersección de longitud de suspensión en la ecuación original apropiada.¹⁹

La ecuación requerida para la solución de la longitud de suspensión es tomada para la aplicación de la siguiente ecuación:

$$I_V = \frac{WLT^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l^2 - I_G \quad (2.124)$$

Donde la aeronave es puesta a prueba en las dos longitudes de suspensión, entonces, las ecuaciones para las dos suspensiones son:

$$I_{V_S} = \frac{W_S L_S T_S^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l_S^2 - I_{G_S} \quad (2.125)$$

¹⁸**PAPAGEORGIOU, Evangelos C.** *“Development of a Dynamic Model for a UAV”*. Naval Postgraduate School Monterey Ca, 1997.

¹⁹**GRACEY, William.** *“The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes by a Simplified Compound-Pendulum Method”*. NACA Technical Note N° 1629. Langley Memorial Aeronautical Laboratory Langley Field, Va. 1948.

$$I_{V_L} = \frac{W_L L_L T_L^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l_L^2 - I_{G_L} \quad (2.126)$$

Donde los subíndices S y L , hacen referencia a la suspensión corta y larga, respectivamente.

Desde el principio de los momentos, la longitud del péndulo debe ser expresada en términos de los momentos de la aeronave y de la oscilación total del mismo alrededor del eje de rotación, así:

$$L = \frac{wl + w'l'}{W} \quad (2.127)$$

La sustitución de la ecuación 2.127 en las ecuaciones 2.125 y 2.126:

$$I_{V_S} = \frac{(wl_S + w'_S l'_S) T_S^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l_S^2 - I_{G_S} \quad (2.128)$$

$$I_{V_L} = \frac{(wl_L + w'_L l'_L) T_L^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l_L^2 - I_{G_L} \quad (2.129)$$

Desde la relación $l_L = l_S + \Delta l$ (donde Δl es la diferencia entre las longitudes de suspensión), la ecuación 6 debe ser expresada como:

$$I_{V_S} = \frac{(wl_L + w'_L l'_L) T_L^2}{4\pi^2} + \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) (l_S + \Delta l)^2 + I_{G_L} \quad (2.130)$$

El momento de inercia de la aeronave alrededor de los ejes de cuerpo, por supuesto, es el mismo para ambas longitudes de suspensión, larga y corta, haciendo $I_{V_L} = I_{V_S}$.

La longitud de suspensión corta puede ser encontrada, resolviendo las ecuaciones 2.128 y 2.129 simultáneamente. La solución de estas ecuaciones es:

$$l_S = \frac{T_S^2 w'_S l'_S - T_L^2 (w \Delta l + w'_L l'_L) + 4\pi^2 \left[\left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) (\Delta l)^2 + I_{G_L} - I_{G_S} \right]}{w(T_L^2 - T_S^2) - 8\pi^2 \Delta l \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right)} \quad (2.131)$$

Para el valor de l_s es hallado con la ecuación 2.131, la longitud del péndulo debe ser calculada desde la ecuación 2.127 y el momento virtual de inercia, determinado por la ecuación 2.125.

Es aconsejable tener la localización longitudinal del centro de gravedad antes de realizar los experimentos oscilatorios. Cuando se pone en balanceo el modelo, la aeronave debe ser orientada de tal manera que su centro de gravedad este directamente encima de la línea central del soporte. Si el centro de gravedad ha sido localizado con precisión, el modelo se equilibrara.

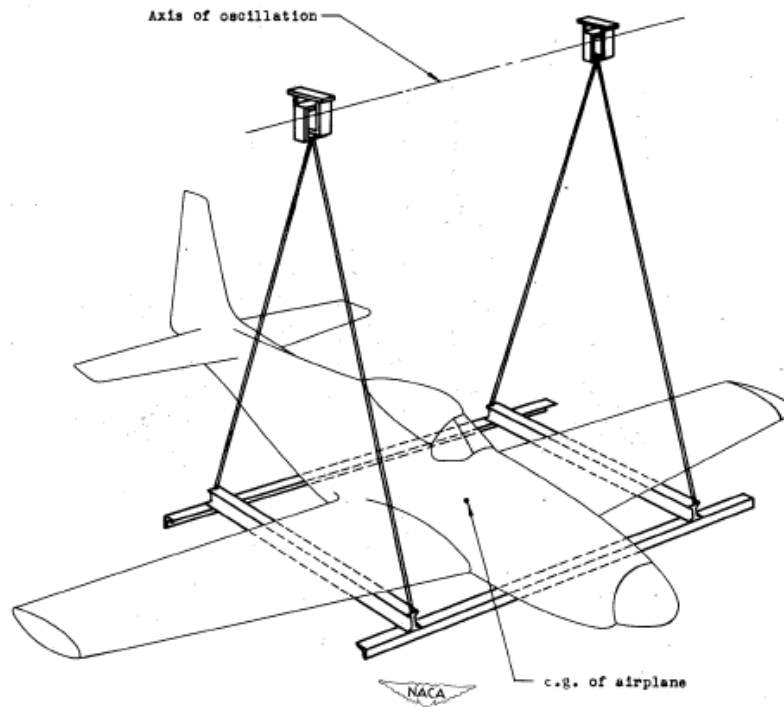
La exactitud de la medida de longitud de suspensión por el método visto anteriormente desde la ecuación 2.131, depende en gran medida de la presión de los periodos de oscilación. Anteriormente, el periodo ha sido determinado después de cronometrar cierta cantidad de oscilaciones completas (ciclos), y el cronometro debe ser operado manualmente.

La diferencia entre la longitud de las dos suspensiones debe por supuesto, ser tomadas tan grandes como sea practico.

Símbolos:

- w Peso de la aeronave.
- w' Peso del soporte.
- W peso del péndulo ($w + w'$).
- l Distancia desde el eje de oscilación al centro de gravedad de la aeronave (longitud de suspensión).
- l' Distancia desde el eje de oscilación al centro de gravedad del soporte.
- L Distancia desde el eje de oscilación al centro de gravedad del péndulo (longitud del péndulo).
- Δl Diferencia entre las dos longitudes de suspensión.
- T Periodo de oscilación.
- V Volumen total de la aeronave.
- ρ Densidad del aire.
- g Aceleración por gravedad.
- M_A Masa adicional.
- I_V Momento de inercia virtual de la aeronave.
- I_G momento de inercia del soporte alrededor del eje de rotación.

Figura 2.23 Montaje para la determinación del momento de inercia sobre el eje Y, por el método del péndulo compuesto



Fuente: GRACEY, William. "The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes by a Simplified Compound-Pendulum Method". NACA Technical Note N° 1629. Langley Memorial. Pagina 25.

3 LA AERONAVE

3.1 Descripción general:

El Long-EZ es una aeronave de una configuración geométrica moderna diseñada a principios de los años 70's por el ingeniero aeronáutico Elbert "Burt" Rutan, de un aspecto similar al VariEze, aeronave diseñada y fabricada por Rutan Aircraft Factory, con la diferencia que el Long-EZ presenta un mayor rendimiento en su autonomía de vuelo, de allí su nombre.

Las características principales del Long-Ez son: aeronave de configuración canard; ala en delta de 2ángulos de flechamiento, un desarrollo del sistema de winglet con un perfil de curvatura simétrica, reduciendo los índices de arrastre y los vórtices en cada punta del ala y a su vez incorporan superficies de control vertical para el movimiento de guiñada; un motor con hélice, situado atrás de la cabina biplaza tipo pusher.

Figura 3.1 Long-Ez, Burt Rutan.



En nuestro proyecto, haremos uso de un Long-Ez a escala, conocido en el campo del aeromodelismo como el Long-ez Velociraptor. La fabricación del aeromodelo se realizó con un 80% en balsa y un 20% en poli estireno expandido.

Figura 3.2 Long-Ez Velociraptor (Aeromodelo).



Y sus dimensiones geométricas son:

DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA AERONAVE		
Longitud	ℓ	0,83m
Altura	h	0,196 m
Superficie Alar	S_w	0,214156m ²
Superficie Canard	S_c	0,032232m ²
Cuerda Media Alar	\bar{c}_w	0,195m
Cuerda Media Canard	\bar{c}_c	0,06m
Envergadura Alar	b_w	1,1m
Envergadura Canard	b_c	0,538m
Aspect Ratio Ala	AR_w	5,65008685
Aspect Ratio Canard	AR_c	8,98001986
Centro Aerodinámico Canard al CG	l_c	0,276 m
Centro Aerodinámico Alar al CG	x_w	0,102m
Diámetro Promedio del Fuselaje	\bar{d}_f	0,088947222m
Flechamiento Alar	Λ_w	42,3 grados
Flechamiento Alar a $c/4$	$\Lambda_{wc/4}$	37,3 grados
Flechamiento Canard	Λ_c	11 grados
Inercia Sobre el Plano y	I_{yy}	0,306116396kg * m ²

Tabla 3-1 Descripción geométrica de la aeronave.

El aeromodelo va a tener las siguientes condiciones de vuelo:

CONDICIONES DE VUELO		
Velocidad de Vuelo	U	17m/s
Peso de la Aeronave	W	1kg
Densidad del Aire	ρ	$1,225\text{kg/m}^3$
Angulo de Ataque Ala	θ_w	0grados
Angulo de Ataque Canard	θ_c	2grados
Gravedad	g	$9,81\text{m/s}^2$

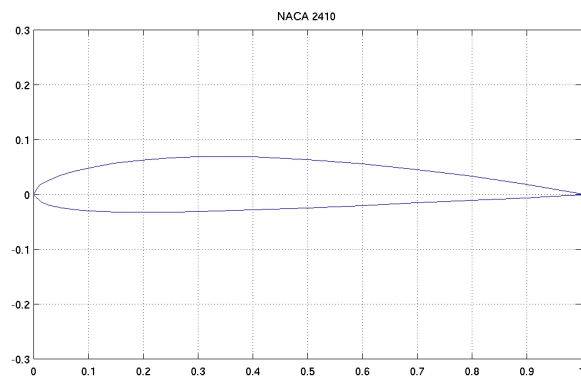
Tabla 3-2 Condiciones de vuelo para las aeronaves.

3.2 Aerodinámica:

Los perfiles aerodinámicos son tomados del mismo diseño del aeromodelo Long-Ez Velociraptor.

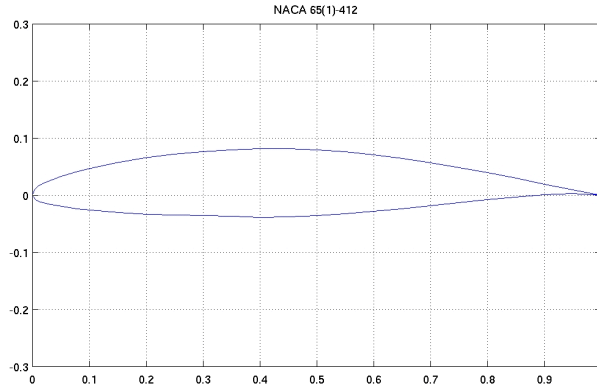
El perfil aerodinámico del ala es el NACA 2410 para bajos números de Reynolds;

Grafica 3.1 Perfil alar NACA 2410.



Y el perfil aerodinámico para el canard es el NACA 65₁-412, también para bajos números Reynolds:

Grafica 3.2 Perfil del Canard NACA 65₁-412.



Datos tomados de las anteriores graficas:

DATOS DE LOS PERFILES AERODINÁMICOS		
Angulo de Ataque a Sustentación Cero del Ala	α_0	-0,03490659rad
Pendiente de la curva C_L con respecto a α del perfil alar.	$C_{L\alpha_{AFW}}$	5,8728174 ¹ /rad
Pendiente de la curva C_L con respecto a α del perfil canard.	$C_{L\alpha_{AFc}}$	5,729577951 ¹ /rad
Coeficiente de Momento alrededor del CA del Ala	$C_{m_{ac}}$	-0,048
Relación Sustentación Arrastre de Ala	LD_w	11
Relación Sustentación Arrastre del Canard	LD_c	11

Tabla 3-3 Datos de los perfiles aerodinámicos.

CÁLCULOS AERODINÁMICOS		
Pendiente de la curva C_L con respecto a α del ala.	$C_{L_{\alpha_w}}$	$4,09882736^1/rad$
Pendiente de la curva C_L con respecto a α del canard.	$C_{L_{\alpha_c}}$	$4,52198241^1/rad$
Coeficiente de sustentación cero del Ala	$C_{L_{0w}}$	0,14307607
Coeficiente de sustentación de Ala	C_{L_w}	0,39022331
Coeficiente de arrastre del Ala	C_{D_w}	0,14307607
Eficiencia de Oswald	e	0,75966112

Tabla 3-4 Cálculos aerodinámicos.

3.3 ESTABILIDAD ESTATICA

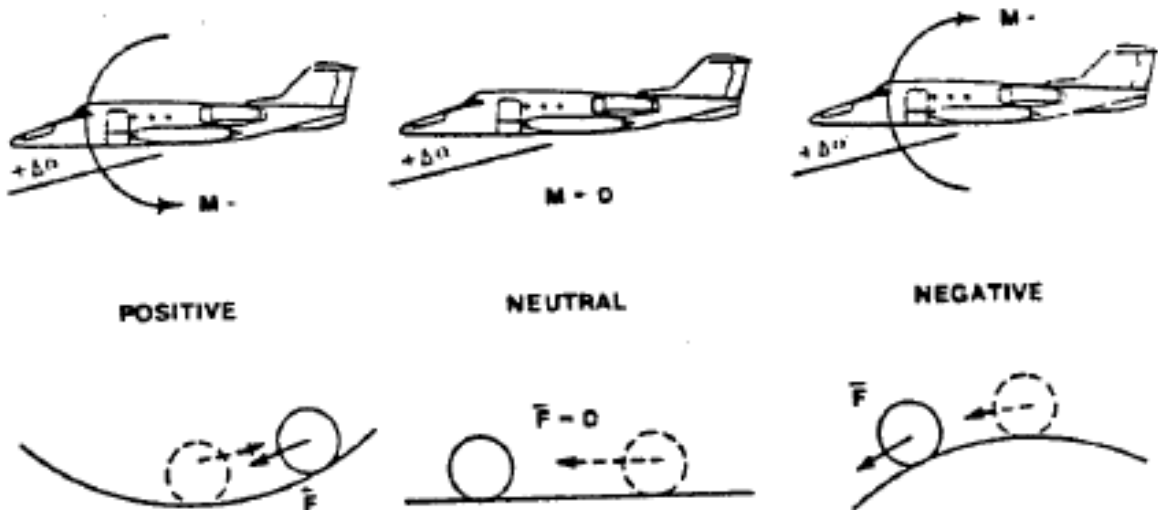
3.3.1 Definición de estabilidad estática longitudinal.

Estabilidad estática es la reacción de un cuerpo a una perturbación desde el equilibrio. Para determinar la estabilidad estática de un cuerpo, el cuerpo debe ser inicialmente perturbado desde su estado en equilibrio. Si la tendencia inicial del cuerpo cuando es perturbado desde el equilibrio es retornar a su posición de equilibrio original el cuerpo muestra una estabilidad estática positiva o simplemente se considera estable. Si la tendencia inicial del cuerpo es permanecer en la posición de perturbación, se dice que el cuerpo es neutralmente estable. Sin embargo el cuerpo al ser perturbado, si su tendencia inicial es continuar desplazándose desde el equilibrio el cuerpo experimenta estabilidad estática negativa o es inestable.

La estabilidad estática longitudinal de una aeronave es determinada de manera similar. Si una aeronave en equilibrio es perturbada momentáneamente por una ráfaga vertical, la resultante de cambio en el Angulo de ataque causa un cambio en el coeficiente de sustentación de la aeronave (la velocidad es constante para este periodo de tiempo). El cambio en el coeficiente de sustentación produce fuerzas aerodinámicas y momentos adicionales en esta posición perturbada. Si las fuerzas aerodinámicas y momentos creados tienden a regresar la aeronave a su posición original de equilibrio, la aeronave posee estabilidad estática

positiva o es estable. En caso de que la aeronave tienda a permanecer en la posición de perturbación, este posee estabilidad neutral. Si las fuerzas y momentos tienden a causar que la aeronave además diverja desde el equilibrio, la aeronave posee estabilidad estática longitudinal negativa o es inestable.⁶

Figura 3.3 Estabilidad estática en relación a la estática de la aeronave a una ráfaga de viento.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, pagina 1.

3.3.2 Análisis de la estabilidad estática longitudinal.

La estabilidad estática longitudinal es solamente un caso especial para la totalidad de las ecuaciones de movimiento de una aeronave. De las seis ecuaciones de movimiento, la estabilidad estática longitudinal se refiere solamente a una, la ecuación de pitch describiendo el movimiento de la aeronave alrededor del eje y.

$$G_y = \dot{Q}I_y - PR(I_z - I_x) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (3.1)$$

El factor teórico que pertenece a una aeronave en vuelo recto y nivelado sin desbalanceo o fuerzas o momentos, permite al movimiento de estabilidad estática longitudinal ser independiente de las ecuaciones de movimiento laterales y direccionales. Esta no es una sobre simplificación

ya que la mayoría de las aeronaves gasta mucho del vuelo bajo condiciones de equilibrio. Además la perturbación requerida para determinar y medir la respuesta de la aeronave, toma lugar alrededor de los ejes o en el plano longitudinal. Bajo estas condiciones, la ecuación 1 se reduce a:

$$G_y = 0$$

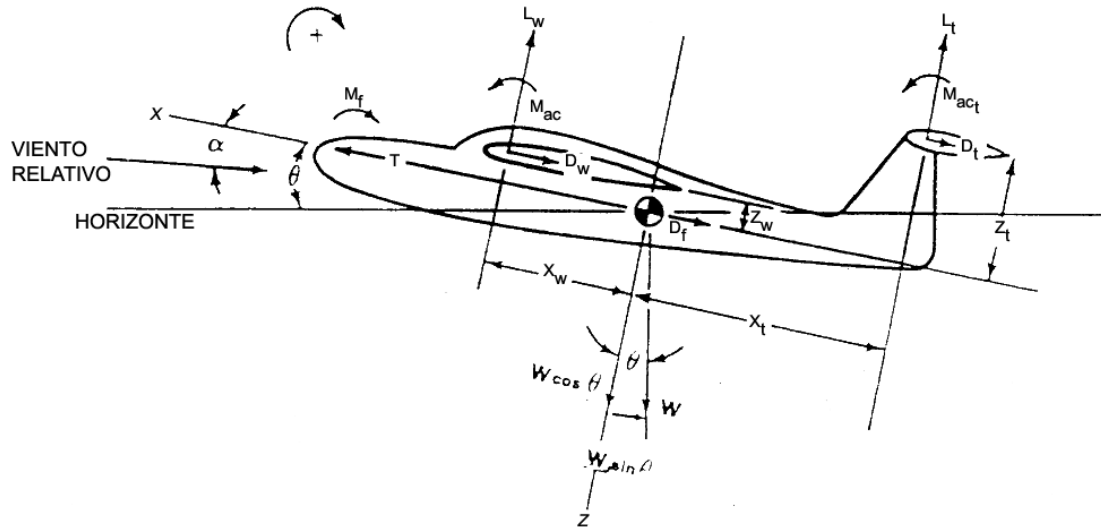
Ya que la estabilidad estática longitudinal trata con la resultante del momento de cabeceo causado por cambios momentariamente en el ángulo de ataque y coeficientes de sustentación, la primera derivada de estabilidad llega a ser C_{m_α} o $C_{m_{C_L}}$. El valor de cualquier derivada es una indicación directa de la estabilidad estática longitudinal de la aeronave en particular.

Para determinar una expresión para la derivada $C_{m_{C_L}}$, una aeronave en vuelo en equilibrio y estabilizada con la superficie de control del estabilizador horizontal FIJA será analizada. Una ecuación de momento será determinada a partir de las fuerzas y momentos actuando sobre la aeronave. Una vez esta ecuación sea adimensionalizada, en forma de coeficiente de momento, la derivada con respecto a C_L será tomada. Esta ecuación diferencial será una expresión para $C_{m_{C_L}}$ y será relacionada directamente a la estabilidad de la aeronave. Serán analizados individualmente los términos que contribuyen a la estabilidad.⁶

3.3.3 Ecuación de estabilidad para mando fijo.

Para derivar la ecuación longitudinal de momento de cabeceo, nos referimos a la aeronave de la figura 3.4. Escribiendo la ecuación de momento usando la convención de signos para momento de cabeceo positivo nariz hacia arriba.

Figura 3.4 Momentos de cabeceo de la aeronave.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, pagina 5.

$$\begin{aligned} \sum^+ M_{cg} = & L_w X_w + D_w Z_w - M_{ac} + M_f - L_t X_t + D_t h_t \\ & - M_{ac_t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si una revisión en orden de magnitudes es hecha, algunos de los términos pueden ser lógicamente eliminados debido a su tamaño relativo. C_t Puede ser omitido desde que:

$$D_t = \frac{D_w}{10} \simeq \frac{L_w}{100}$$

M_{ac_t} Es cero para un perfil simétrico en la sección del estabilizador horizontal.

Reescribiendo la ecuación simplificada

$$\sum^+ M_{cg} = L_w X_w + D_w Z_w - M_{ac} + M_f - L_t X_t \quad (3.3)$$

Es conveniente expresar la ecuación (3) en forma de coeficientes adimensionales, dividiendo a ambos lados de la ecuación por q_w, S_w, \bar{c}_w

$$\frac{M_{cg}}{q_w S_w \bar{c}_w} = \frac{L_w X_w}{q_w S_w \bar{c}_w} + \frac{D_w Z_w}{q_w S_w \bar{c}_w} - \frac{M_{ac}}{q_w S_w \bar{c}_w} + \frac{M_f}{q_w S_w \bar{c}_w} - \frac{L_t X_t}{q_w S_w \bar{c}_w} \quad (3.4)$$

Sustituyendo los siguientes coeficientes en la ecuación (4).

$C_{m_{cg}} = \frac{M_{cg}}{q_w S_w \bar{c}_w}$ Coeficiente total de momento de cabeceo alrededor del cg.

$C_{m_{ac}} = \frac{M_{ac}}{q_w S_w \bar{c}_w}$ Coeficiente de momento de cabeceo del centro aerodinámico del ala.

$C_{m_f} = \frac{M_f}{q_w S_w \bar{c}_w}$ Coeficiente de momento de cabeceo del fuselaje.

$C_L = \frac{L_w}{q_w S_w}$ Coeficiente de la fuerza aerodinámica de sustentación del ala.

$C_{L_t} = \frac{L_t}{q_t S_t}$ Coeficiente de la fuerza aerodinámica de sustentación de la cola.

$C_D = \frac{D_w}{q_w S_w}$ Coeficiente de la fuerza aerodinámica de arrastre del ala.

La ecuación (4), ahora puede ser escrita como:

$$C_{m_{cg}} = C_L \frac{X_w}{\bar{c}} + C_D \frac{Z_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}} + C_{m_f} - \frac{X_t X_t}{q S \bar{c}} \quad (3.5)$$

Donde el subíndice w es reducido. Para tener la cola indicada en términos de un coeficiente, multiplicamos y dividimos por $q_t S_t$.

$$\frac{L_t X_t}{q_w S_w \bar{c}_w} \cdot \frac{q_t S_t}{q_t S_t}$$

Sustituyendo el factor de eficiencia de la cola $\eta_t = q_t/q_w$ y designando el coeficiente de volumen de la cola $V_H = l_t S_t / S \bar{c}$ en donde $l_t = X_w + X_t$ la ecuación (5) se convierte en.

Ecuación de balance

$$C_{m_{cg}} = C_L \frac{X_w}{c} + C_D \frac{Z_w}{c} - C_{m_{ac}} + C_{m_f} - C_{L_t} V_H \eta_t \quad (3.6)$$

La ecuación (6) se refiere como a la ecuación de equilibrio e cabeceo. Si las magnitudes de los términos individuales en la ecuación anterior son ajustadas al valor adecuado, la aeronave podrá estar situada en vuelo en equilibrio, donde $C_{m_{cg}} = 0$.

Teniendo la derivada de la ecuación (6) con respecto a C_L y asumiendo que X_w, Z_w, V_H y η_t no varían con C_L .

Ecuación de estabilidad.

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = \underbrace{\frac{X_w}{c} + \frac{dC_D}{dC_L} \frac{Z_w}{c} - \frac{dC_{m_{ac}}}{dC_L}}_{ala} + \underbrace{\frac{dC_{m_f}}{dC_L}}_{fuselaje} - \underbrace{\frac{dC_{L_t}}{dC_L} V_H \eta_t}_{cola} \quad (3.7)$$

La ecuación (7) es la ecuación de estabilidad y está relacionada a la derivada de estabilidad C_{m_α} por la pendiente de la curva de sustentación.

a. Teóricamente.

$$C_{m_\alpha} = \frac{dC_m}{d\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha} \frac{dC_m}{dC_L}$$

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} \frac{dC_m}{dC_L} \quad (3.8)$$

La ecuación (8) es válida solamente para una aeronave rígida a un bajo número Mach cuando los efectos del empuje son pequeños; sin embargo, esta relación proporciona un útil índice de estabilidad.

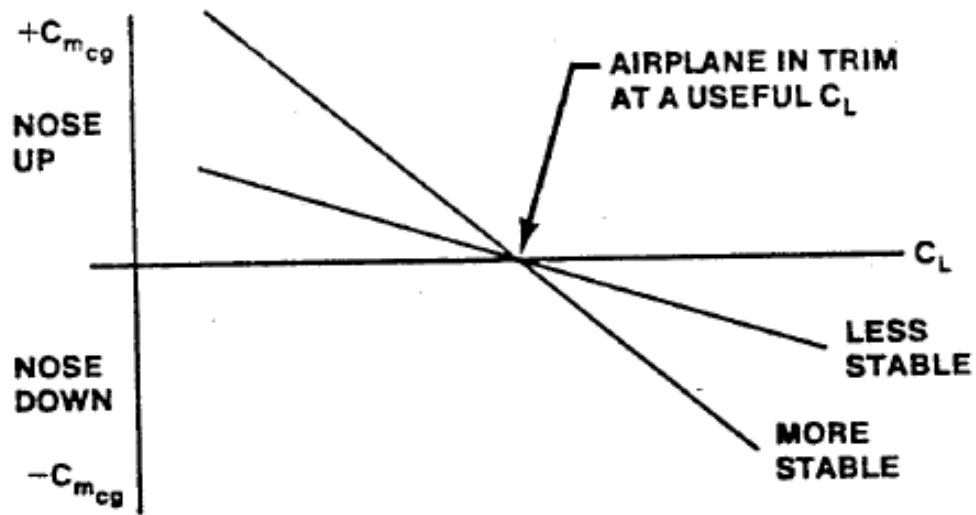
Las ecuaciones (6) y (7) determinan los dos criterios necesarios para la estabilidad longitudinal:

1. La aeronave está balanceada.
2. La aeronave es estable.

La primera condición se satisface si la ecuación de momento de cabeceo pueda ser obligada a que $C_{m_{cg}} = 0$, para un útil valor positivo de C_L . Esta condición es lograda ajustando la deflexión del elevador haciendo que el momento alrededor del centro de gravedad sea cero ($M_{(c.g)} = 0$).

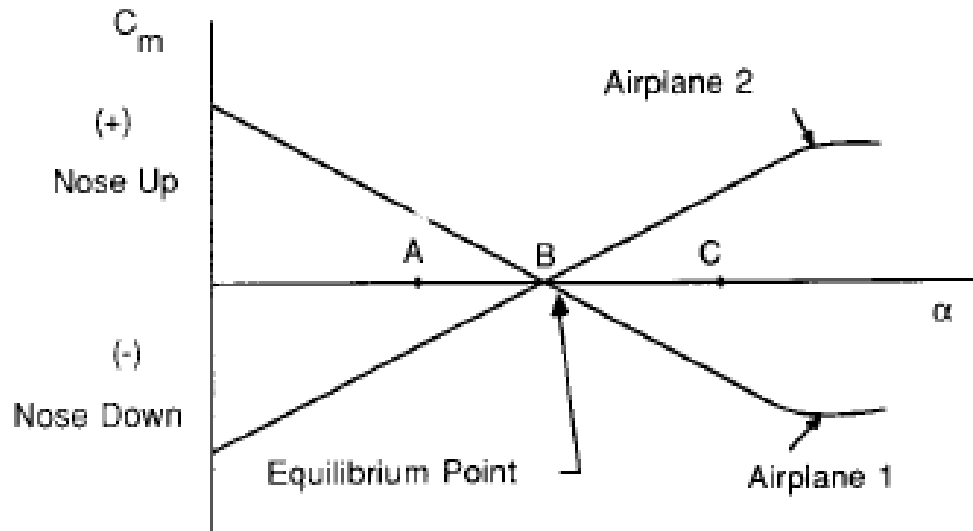
La segunda condición se satisface si la ecuación (7) o $dC_{m_{cg}}/dC_L$ tiene un valor negativo. A partir de la gráfica 3.3, un valor negativo para la ecuación (7) es necesario para que la aeronave sea estable. En caso de que una ráfaga causara un incremento en el ángulo de ataque (y un correspondiente incremento en C_L), un valor negativo de $C_{m_{cg}}$ debería producir que la aeronave regresase al equilibrio, o $C_{m_{cg}} = 0$. Cuanto mayor sea la pendiente o el valor negativo, el mayor momento de restauración es generado por un incremento en C_L . La pendiente de dC_m/dC_L es una medida directa de la “estabilidad ante una ráfaga” de la aeronave.

Grafica 3.3 Estabilidad estática.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, página 10.

Grafica 3.4 Coeficiente de momento de cabeceo con respecto al ángulo de ataque.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 42.

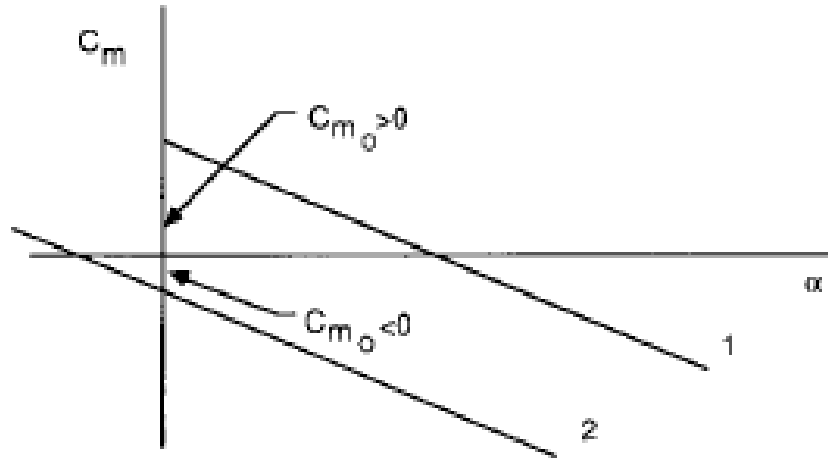
Como ejemplo de estabilidad estática longitudinal podemos ver que en la gráfica 3.4, dos aeronaves están volando en un punto de equilibrio

denotado por B ($C_{m_{cg}} = 0$). Supongamos que repentinamente las aeronaves encuentran una ráfaga hacia arriba tal que el ángulo de ataque se incrementa hasta el punto C. en el punto del ángulo de ataque denotado por C, la aeronave 1 desarrolla un momento de cabeceo negativo (nariz abajo), el cual tiende a rotar la aeronave de nuevo hacia su punto de equilibrio. Sin embargo, para la misma perturbación, la aeronave 2 desarrolla un momento de cabeceo positivo (nariz arriba), el cual tiende a rotar la aeronave fuera del punto de equilibrio. Si tuviéramos que encontrar una perturbación la cual redujera el ángulo de ataque al punto A, Podríamos encontrar que la aeronave 1 desarrolla un momento nariz-arriba el cual rota la aeronave de nuevo hacia el punto de equilibrio. Por otra parte, la aeronave 2 experimenta un momento nariz-abajo el cual rota la aeronave fuera del punto de equilibrio. A partir de este simple análisis, podemos concluir que para tener estabilidad estática longitudinal la pendiente de la curva de momento de cabeceo de la aeronave debe ser negativa a través del punto de equilibrio.²⁰

$$\frac{dC_m}{d\alpha} < 0$$

²⁰NELSON, R. C. *Flight Stability and Automatic Control*, 2-nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1996.

Grafica 3.5 Coeficiente de momento de cabeceo con respecto al ángulo de ataque para una aeronave estable.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 43.

Otro punto que debemos efectuar es ilustrado en la gráfica 3.5. Aquí vemos dos curvas de momento de cabeceo las cuales ambas satisfacen la condición para estabilidad estática. Sin embargo solamente la curva 1 puede ser equilibrada a un ángulo de ataque positivo. Por lo tanto, adicionalmente para tener estabilidad estática, debemos también tener una intercepción positiva, es decir $C_{m_0} > 0$. Aunque desarrollemos el criterio para estabilidad estática desde la curva C_m Vs α podríamos tener con la misma facilidad y el mismo resultado trabajáramos con una curva C_m Vs C_L , como se ha mencionado anteriormente. Es este caso, el requerimiento para estabilidad estática debería ser:

$$\frac{dC_m}{dC_L} < 0$$

3.3.4 Contribución de los componentes de la aeronave a la estabilidad.

Al discutir los requerimientos para estabilidad estática, hemos considera hasta ahora solamente la curva de momento total de cabeceo de la aeronave. Sin embargo es de interés conocer la contribución del ala, fuselaje, cola y sistema de propulsión, al momento de cabeceo y

características de estabilidad estática de la aeronave. En la siguiente sección cada uno de los componentes será considerado por separado. Empezaremos por descomponer la aeronave dentro de sus componentes básicos tales como el ala, fuselaje, cola horizontal y unidad de propulsión.⁹

3.3.4.1 Contribución del ala.

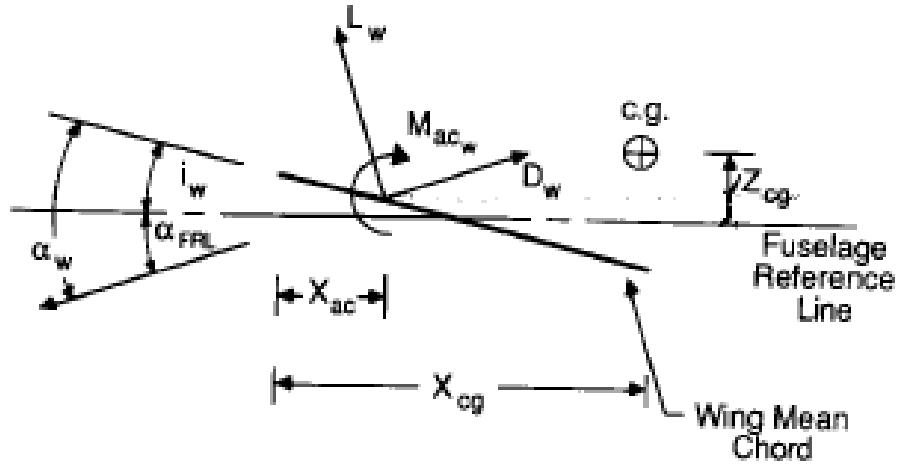
La contribución del ala en la estabilidad estática de la aeronave puede ser examinada con ayuda de la figura 3.5. En este esquema hemos reemplazado el ala por su cuerda media aerodinámica (\bar{c}). La distancia desde el borde de ataque del ala, al centro aerodinámico y al centro de gravedad son denotados por X_{ac} y X_{cg} , respectivamente. El desplazamiento vertical del centro de gravedad es denotado por Z_{cg} . El ángulo entre la línea de la cuerda del ala con la línea de referencia del fuselaje es denotado como i_w .

Si sumamos los momentos alrededor del centro de gravedad se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum \text{Momentos} = M_{cg_w}$$

$$\begin{aligned} M_{cg_w} = & L_w \cos(\alpha_w - i_w) [X_{cg} - X_{ac}] \\ & + D_w \sin(\alpha_w - i_w) [X_{cg} - X_{ac}] \\ & + L_w \sin(\alpha_w - i_w) [Z_{cg}] - D_w \cos(\alpha_w - i_w) [Z_{cg}] \\ & + M_{ac_w} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Figura 3.5 Contribución del ala al momento de cabeceo.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 44.

Dividiendo por $\frac{1}{2}V^2\rho S\bar{c}$.

$$\begin{aligned}
 C_{m_{cgw}} = & C_{Lw} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \cos(\alpha_w - i_w) \\
 & + C_{Dw} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \sin(\alpha_w - i_w) \\
 & + C_{Lw} \frac{(Z_{cg})}{\bar{c}} \sin(\alpha_w - i_w) \\
 & - C_{Dw} \frac{(Z_{cg})}{\bar{c}} \cos(\alpha_w - i_w) + C_{m_{acw}}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

La ecuación (10) puede ser simplificada asumiendo que el ángulo de ataque es pequeño. Con esta suposición la siguiente aproximación puede ser hecha.

$$\cos(\alpha_w - i_w) = 1, \quad \sin(\alpha_w - i_w) = \alpha_w - i_w, \quad C_L \gg C_D$$

Si además asumimos que la contribución vertical es despreciable, entonces la ecuación (10) se reduce a.

$$C_{m_{cgw}} = C_{m_{acw}} + C_{Lw} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \tag{3.11}$$

Considerando que, $C_{L_w} = \frac{dC_{L_w}}{d\alpha} \alpha$

$$\Rightarrow C_{m_{cg_w}} = C_{m_{ac_w}} + \frac{dC_{L_w}}{d\alpha} \alpha \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.11.1)$$

Si derivamos con respecto de α , nos queda:

$$\frac{dC_{m_{cg_w}}}{d\alpha} = \frac{dC_{m_{ac_w}}}{d\alpha} + \frac{dC_{L_w}}{d\alpha} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.11.2)$$

$\frac{dC_{m_{ac_w}}}{d\alpha} = 0$ El momento con respecto al centro aerodinámico es independiente del ángulo de ataque, lo cual queda.

$$C_{m_{\alpha_w}} = C_{L_{\alpha_w}} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.12)$$

Ya que también queremos ser capaz de equilibrar la aeronave en un ángulo de ataque positivo, el coeficiente de momento de cabeceo a cero ángulo de ataque, C_{m_0} , debe ser más grande que cero.

Por lo tanto de la ecuación (11), se da:

$$C_{m_{cg_w}} = C_{m_{ac_w}} + \left(C_{L_{0_w}} + C_{L_{\alpha_w}} \alpha_w \right) \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.13)$$

Donde $C_{L_w} = C_{L_{0_w}} + C_{L_{\alpha_w}} \alpha_w$. Aplicando la condición para estabilidad estática se obtiene.

$$C_{m_{0_w}} = C_{m_{ac_w}} + C_{L_{0_w}} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.14)$$

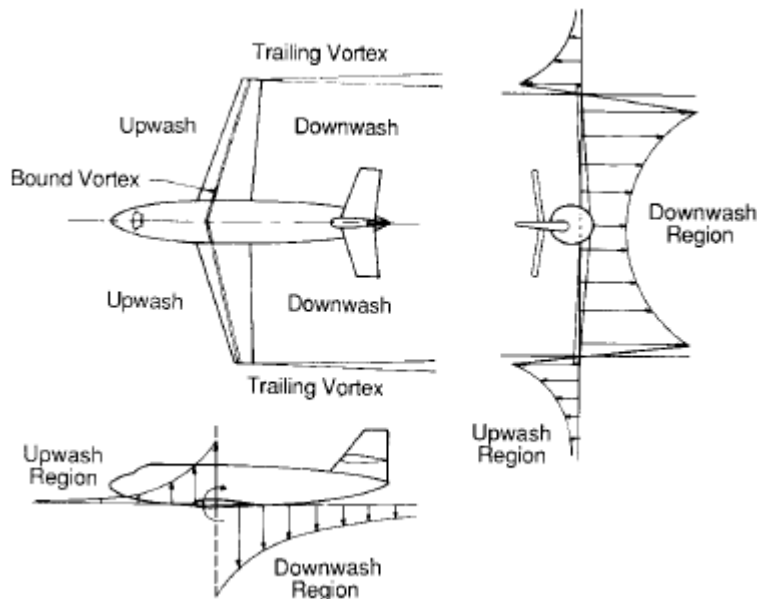
En donde $C_{L_0} = C_{L_\alpha} |\alpha_0|$.

Para que el diseño, del ala independiente sea estáticamente estable, la ecuación (12) nos dice que el centro aerodinámico debería encontrarse atrás del centro de gravedad para hacer que $C_{m_\alpha} < 0$. Para muchas de las aeronaves, la posición del centro de gravedad está localizado ligeramente por detrás del centro aerodinámico. Por lo tanto, la contribución del ala en la estabilidad estática longitudinal es usualmente desestabilizante para la mayoría de aeronaves.

3.3.4.2 Contribución de la cola.

La superficie de cola horizontal puede estar situada, bien sea adelante o por detrás del ala. Cuando la superficie se localiza por delante del ala, la superficie es llamada canard. Ambas superficies son influenciadas por el campo de flujo creado por el ala. La superficie canard es afectada por la deflexión de flujo del aire hacia arriba (upwash) del ala, mientras la cola posterior está sometida la deflexión de flujo hacia abajo (downwash).⁹

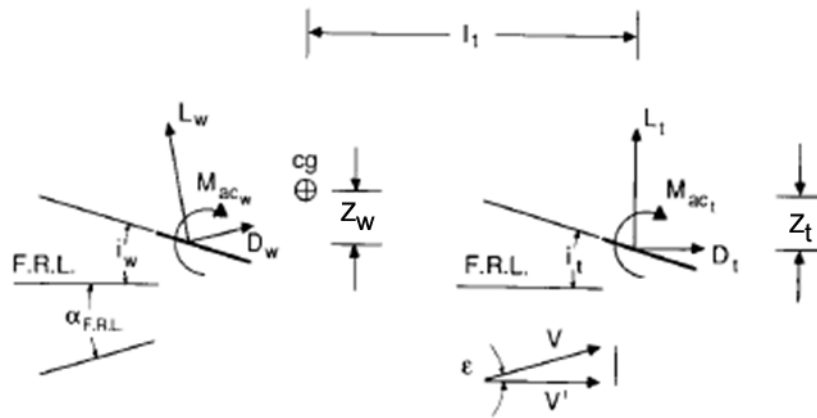
Figura 3.6 Campo de flujo creado por el ala alrededor de una aeronave.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 46.

La figura 3.6 es un dibujo del campo de flujo que rodea la elevación del ala. El campo de flujo del ala es debido, principalmente, a los vórtices. Las magnitudes del upwash o downwash son dependientes a la localización de la superficie de cola con respecto al ala.

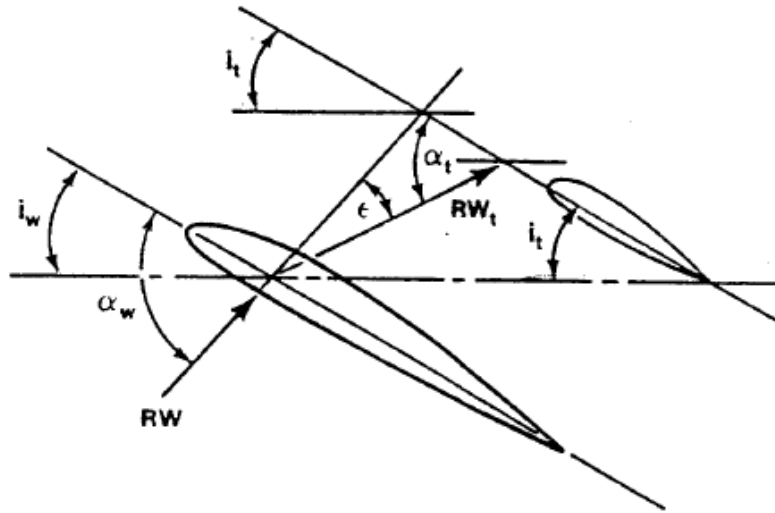
Figura 3.7 Contribución de la cola al momento de cabeceo.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 46.

La contribución que hace una superficie de la cola situada atrás del ala, en la sustentación y momento de cabeceo de la aeronave puede ser desarrollada con la ayuda de la figura 3.7. En este esquema, la superficie de la cola ha sido reemplazada por su cuerda media aerodinámica.⁶

Figura 3.8 Angulo de ataque de la cola.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 5, pagina 18.

De la figura 3.8, el ángulo de ataque en la cola puede ser expresado como.

$$\alpha_t = \alpha_w - i_w - \epsilon + i_t \quad (3.15)$$

Donde ϵ y i_t , son el downwash y el ángulo de incidencia de la cola, respectivamente. Si asumimos ángulos pequeños y despreciamos la contribución de resistencia de la cola, la sustentación total del ala y cola pueden ser expresadas como.

$$L = L_w + L_t \quad (3.16)$$

O.

$$C_L = C_{L_w} + \eta \frac{S_t}{S} C_{L_t} \quad (3.17)$$

Donde,

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} V_t^2 \rho}{\frac{1}{2} V_w^2 \rho} \quad (3.18)$$

La razón de la presión dinámica es llamada eficiencia del empenaje o cola de la aeronave y puede tener valores entre los rangos de 0.8-1.2. La magnitud de η depende de la localización de la superficie de empenaje. Si la cola está situada en la región de turbulencia del ala o fuselaje, η será menor que la unidad porque $q_t < q_w$ debido al momentum perdido en la turbulencia. Por otra parte si la cola se localiza en una región donde $q_t > q_w$, entonces η será mayor que la unidad. Tal situación podría existir si la cola estuviera ubicada ya sea, en la corriente deslizando de la propela o en la región de turbulencia que generan los gases de escape de un motor a reacción.

El momento de cabeceo debido al empenaje puede ser obtenida por la sumatoria de momentos alrededor del centro de gravedad:

$$\begin{aligned} M_t = & -l_t [L_t \cos(\alpha_{FRL} - \varepsilon) + D_t \sin(\alpha_{FRL} - \varepsilon)] \\ & - Z_{cg_t} [D_t \cos(\alpha_{FRL} - \varepsilon) - L_t \sin(\alpha_t - \varepsilon)] \\ & + M_{ac_t} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usualmente solo el primer término de la anterior ecuación se mantiene; los otros términos son generalmente pequeños en comparación al primer término. Si de nuevo usamos la suposición de pequeños ángulos y que $C_{L_t} \gg C_{D_t}$, entonces la ecuación (19) se reduce a,

$$M_t = -l_t L_t = -l_t C_{L_t} \frac{1}{2} V_t^2 S_t \quad (3.20)$$

$$C_{m_t} = \frac{M_t}{\frac{1}{2} V^2 S \bar{c}} = -\frac{l_t S_t}{S \bar{c}} \eta C_{L_t} \quad (3.21)$$

O.

$$C_{m_t} = -V_H \eta C_{L_t} \quad (3.22)$$

Donde $V_H = l_t S_t / S \bar{c}$ es llamada la razón de volumen de la cola horizontal.

De la figura (9), el ángulo de ataque de la cola es visto como:

$$\alpha_t = \alpha_w - i_w - \varepsilon + i_t \quad (3.23)$$

El coeficiente C_{L_t} puede ser escrita como.

$$C_{L_t} = C_{L_{\alpha_t}} \alpha_t = C_{L_{\alpha_t}} (\alpha_w - i_w - \varepsilon + i_t) \quad (3.24)$$

Donde $C_{L_{\alpha_t}}$ es la pendiente de la curva de sustentación de la cola. El ángulo de downwash ε se puede expresar como:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha_w \quad (3.25)$$

Donde ε_0 es el downwash a cero ángulo de ataque.

El downwash por detrás de un ala con una distribución elíptica de sustentación puede ser derivado desde la teoría de ala finita y se puede mostrar que se relaciona al coeficiente de sustentación del ala y la relación de aspecto:

$$\varepsilon = \frac{2C_{L_w}}{\pi AR_w} \quad (3.26)$$

Donde el ángulo de downwash está en radianes. La razón de cambio del ángulo de downwash con el ángulo de ataque se determina teniendo la derivada de la ecuación (26).

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{2C_{L_{\alpha_w}}}{\pi AR_w} \quad (3.27)$$

Reescribiendo la contribución de la cola al momento de cabeceo.

$$C_{m_{cg_t}} = -V_H \eta C_{L_t} \quad (3.28)$$

$$C_{m_{cg_t}} = V_H \eta C_{L_{\alpha_t}} (\varepsilon_0 + i_w - i_t) - V_H \eta C_{L_{\alpha_t}} \alpha \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \quad (3.29)$$

Comparando la ecuación (29) con la expresión lineal para el momento de cabeceo, dada como.

$$C_{m_{cg_t}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha \quad (3.30)$$

Mejorando la expresión para la intercepción y la pendiente.

$$C_{m_0_t} = \eta V_H C_{L_{\alpha_t}} (\varepsilon_0 + i_w - i_t) \quad (3.31)$$

$$C_{m_{\alpha_t}} = -\eta V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \quad (3.32)$$

El estabilizador horizontal proporciona la contribución necesaria para la estabilidad positiva es decir ($C_m/C_L < 0, C_{m_\alpha} < 0.$), para compensar la estabilidad negativa de la combinación ala y fuselaje y hacer que la aeronave entera este balanceada y estable.

3.3.4.3 Contribución del Fuselaje

La principal función del fuselaje es dar cabida para la tripulación de vuelo y carga paga tal como pasajeros o carga en general. La forma óptima para el volumen interno a mínima resistencia es un cuerpo en donde la longitud es más grande que el ancho o el alto. Para la mayoría de las formas de fuselajes usadas en diseños de aeronaves, el ancho y el alto son del mismo orden de magnitud y para muchos diseñadores una sección transversal circular es usada.

Las características aerodinámicas de cuerpos largos y delgados fueron estudiadas por Max Munk [2.8] a principios de 1920. Munk se interesó en las características en el momento de cabeceo de los cascos de las aeronaves. En este análisis, el desprecio la viscosidad y trato al flujo

alrededor del cuerpo como un fluido ideal. Utilizando la relación entre el momentum y la energía, el mostro que la razón de cambio del momento de cabeceo con el ángulo de ataque (en radianes) para la rotación de un cuerpo, es proporcional al volumen del cuerpo y la presión dinámica:

$$\frac{dM}{d\alpha} = fn(volumen, \frac{1}{2} \rho V^2) \quad (3.33)$$

Multhopp [9.2.9] extendió este análisis teniendo en cuenta el flujo inducido a lo largo del fuselaje debido a las alas para un cuerpo de una sección transversal arbitraria.⁹ En resumen del método de Multhopp para C_{m_0} y C_{m_α} debido al fuselaje se presenta a continuación:

$$C_{m_{0f}} = \frac{k_2 - k_1}{36.52\bar{c}} \int_0^{l_f} w_f^2 (\alpha_0 w + i_f) dx \quad (3.34)$$

La cual se puede aproximar como

$$C_{m_{0f}} = \frac{k_2 - k_1}{36.52\bar{c}} \sum_{x=0}^{x=l_f} w_f^2 (\alpha_0 w + i_f) \Delta x \quad (3.35)$$

Donde

$k_2 - k_1$ = Factor de corrección para la relación de cuerpos finos

S = Área de referencia del ala.

\bar{c} = Cuerda media aerodinámica del ala.

w_f = Promedio de las secciones del ancho del fuselaje.

$\alpha_0 w$ = Ángulo de ataque del ala a cero sustentaciones relativo a la línea de referencia del fuselaje.

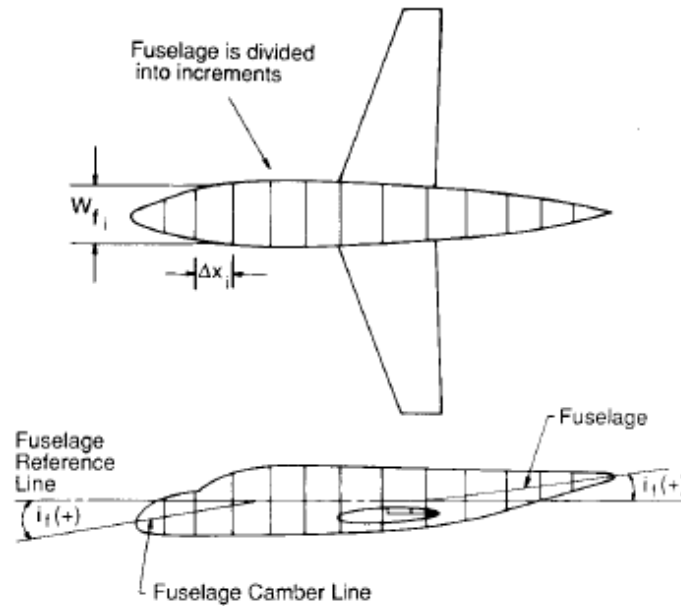
i_f = Incidencia del fuselaje relativo a la línea de curvatura del fuselaje al centro de cada una de las líneas de referencia del fuselaje.

Δx = Longitud de los incrementos del fuselaje.

La figura 3.9, muestra como el fuselaje se puede dividir en segmentos para el cálculo de $C_{m_{0f}}$ y también define el ancho del cuerpo w_f para varias formas de la sección transversal del cuerpo. El factor de corrección $(k_2 - k_1)$ se da por la grafica 3.6.

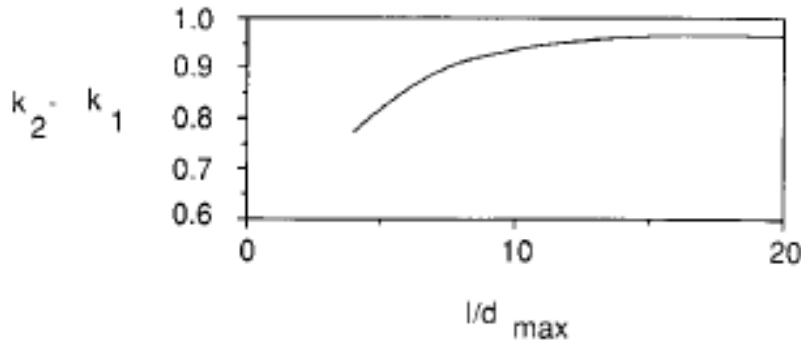
El ángulo de ataque local a lo largo del fuselaje es gran medida afectado por el campo del flujo creado por el ala, como se vio en la figura 3.6, la porción del fuselaje por delante del ala esta en al upwash del ala, mientras que la porción de atrás está en el flujo de downwash del ala.⁹

Figura 3.9 Calculo de $C_{m_{0f}}$ el fuselaje.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 50.

Grafica 3.6 Factor de corrección $k_2 - k_1$



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 51.

El cambio en el momento de cabeceo con el ángulo de ataque está dado por.

$$C_{m_{\alpha_f}} = \frac{1}{36.52\bar{c}} \int_0^{l_f} w_f^2 \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} dx \quad (3.36)$$

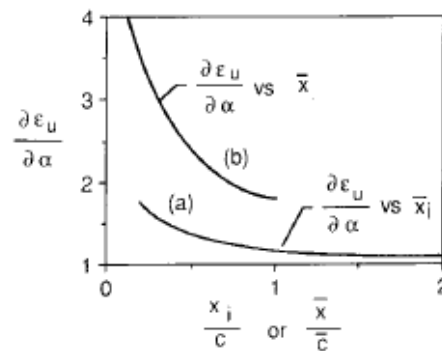
La cual se puede aproximar por.

$$C_{m_{\alpha_f}} = \frac{1}{36.52\bar{c}} \sum_{x=0}^{x=l_f} w_f^2 \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} dx \quad (3.37)$$

El fuselaje nuevamente puede ser dividido en segmentos y el ángulo de ataque local de cada sección, el cual se compone del ángulo de ataque de la sección geométrica más el ángulo local inducido debido al upwash o downwash del ala, puede ser estimado para cada segmento. El cambio de flujo en el ángulo local, con ángulo de ataque, $\partial \varepsilon_u / \partial \alpha$ variando a lo largo del fuselaje y se puede estimar desde la figura 3.16. Para las ubicaciones al frente del ala, el campo de upwash genera grandes

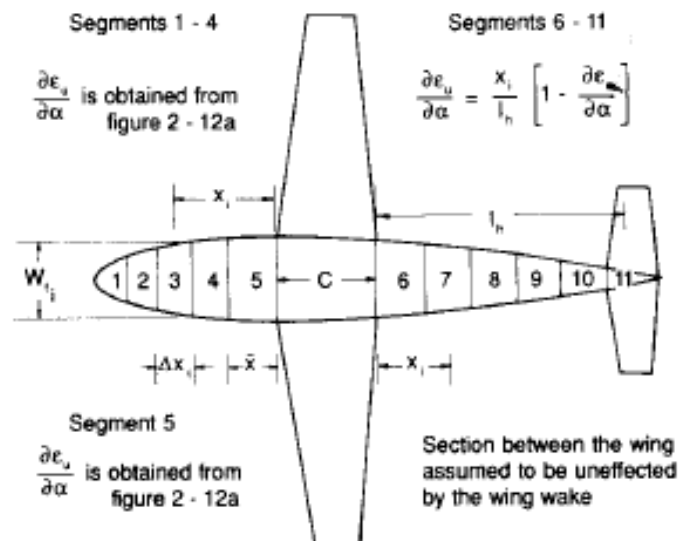
ángulos de ataque local, por consiguiente $\partial \varepsilon_u / \partial \alpha > 1$. Para la región detrás del ala, $\partial \varepsilon_u / \partial \alpha$ se asume que varía linealmente desde cero a $(1 - \partial \varepsilon / \partial \alpha)$ de la cola. La región entre el borde de ataque y borde de salida se asume que sea afectada por el campo de flujo del ala, $\partial \varepsilon_u / \partial \alpha = 0$. La grafica 3.7 es una gráfica que muestra la aplicación de la ecuación (37).⁹

Grafica 3.7 Variación del ángulo del flujo local a lo largo del fuselaje.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 51.

Figura 3.10 Cálculo de C_{m_α} para el fuselaje.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 52.

El momento de cabeceo total para la aeronave ahora se puede obtener mediante la sumatoria de las contribuciones del ala, fuselaje y empenaje.

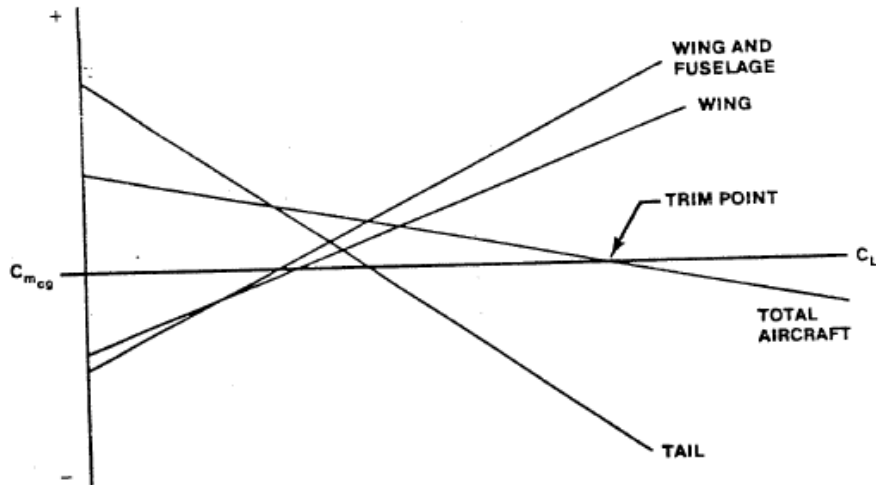
$$C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha \quad (3.38)$$

En donde,

$$C_{m_0} = \underbrace{C_{m_{0w}}}_{\text{Ala}} + \underbrace{C_{m_{0f}}}_{\text{Fuselaje}} + \underbrace{\eta V_H C_{L_{\alpha_t}} (\epsilon_0 + i_w - i_t)}_{\text{Empenaje}} \quad (3.39)$$

$$C_{m_\alpha} = \underbrace{C_{L_{\alpha_w}} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right)}_{\text{Ala}} + \underbrace{C_{m_{\alpha_f}}}_{\text{Fuselaje}} - \underbrace{\eta V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right)}_{\text{Empenaje}} \quad (3.40)$$

Grafica 3.8 Contribución de los componentes de la aeronave a la estabilidad.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 5, pagina 20.

3.3.5 El Punto Neutro (NP).

El punto neutro para mando fijo es definido como la posición del centro de gravedad en el cual la aeronave muestra una estabilidad neutral o $C_{m_\alpha} = 0$.

En donde el símbolo h se usa para representar la posición del centro de gravedad.

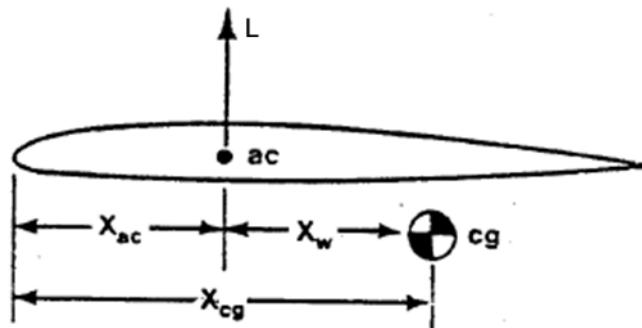
$$h = \frac{X_{cg}}{\bar{c}} \quad (3.41)$$

Para asegurarse de que la aeronave posea estabilidad estática longitudinal, nos gustaría conocer en qué punto $C_{m_\alpha} = 0$. Ajustando C_{m_α} que equivalga a cero y la solución para la posición del centro de gravedad es.^{6,9}

$$C_{m_\alpha} = C_{L_{\alpha_w}} \left(\frac{X_w}{\bar{c}} \right) + C_{m_{\alpha_f}} - \eta V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (3.42)$$

Obsérvese la relación entre el cg y el ac en la figura 3.12.

Figura 3.11 Relación entre el centro de gravedad y el centro aerodinámico.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, página 28.

$$\frac{X_w}{\bar{c}} = h - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \quad (3.43)$$

Sustituyendo la ecuación (3.43) dentro de la ecuación (3.42),

$$C_{m_\alpha} = C_{L_{\alpha_w}} \left(h - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) + C_{m_{\alpha_f}} - \eta V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (3.44)$$

Dividiendo por $C_{L_{\alpha_w}}$ se obtiene,

$$\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}} = h - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} + \frac{C_{m_{\alpha_f}}}{C_{L_{\alpha_w}}} - \eta V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha_w}}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (3.45)$$

De la ecuación (3.8) se sabe que,

$$\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}} = \frac{dC_m}{dC_L} \quad (3.8.1)$$

Ahora reemplazando (3.8.1) en (3.45) da,

$$\frac{dC_m}{dC_L} = h - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} + \frac{C_{m_{\alpha_f}}}{C_{L_{\alpha_w}}} - \eta V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha_w}}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (3.46)$$

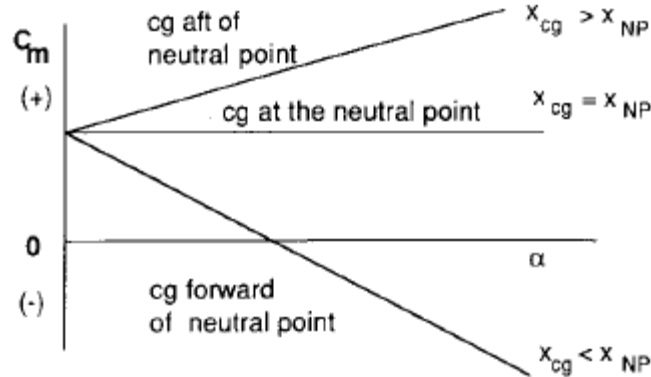
Si establecemos $dC_m/dC_L = 0$, entonces $h \equiv h_n$ y dada la ecuación (3.46).

$$h_n = X_{NP} = \frac{X_{ac}}{\bar{c}} - \frac{C_{m_{\alpha_f}}}{C_{L_{\alpha_w}}} + \eta V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha_w}}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (3.47)$$

Esta es la ubicación del centro de gravedad en donde la aeronave muestra estabilidad estática neutral. El movimiento del centro de gravedad por detrás del punto neutro causa que la aeronave sea

estáticamente inestable. La influencia de la posición del centro de gravedad sobre la estabilidad estática se muestra en la gráfica 3.9.

Grafica 3.9 Influencia de la posición del centro de gravedad sobre la estabilidad estática longitudinal.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 53.

Sustituyendo la ecuación (3.47) de vuelta a la ecuación (3.46), la derivada de estabilidad para mando fijo en términos de la ubicación del cg, se convierte en.

$$\frac{dC_m}{dC_L} = h - h_n \quad (3.48)$$

La estabilidad estática para mando fijo es equivalente a la distancia entre la ubicación del centro de gravedad y el punto neutro en porcentaje de cuerda media aerodinámica. "El margen estático" se refiere a la misma distancia, pero en signo positivo para una aeronave estable.

$$\text{Margen Estatico} = h_n - h \quad (3.49)$$

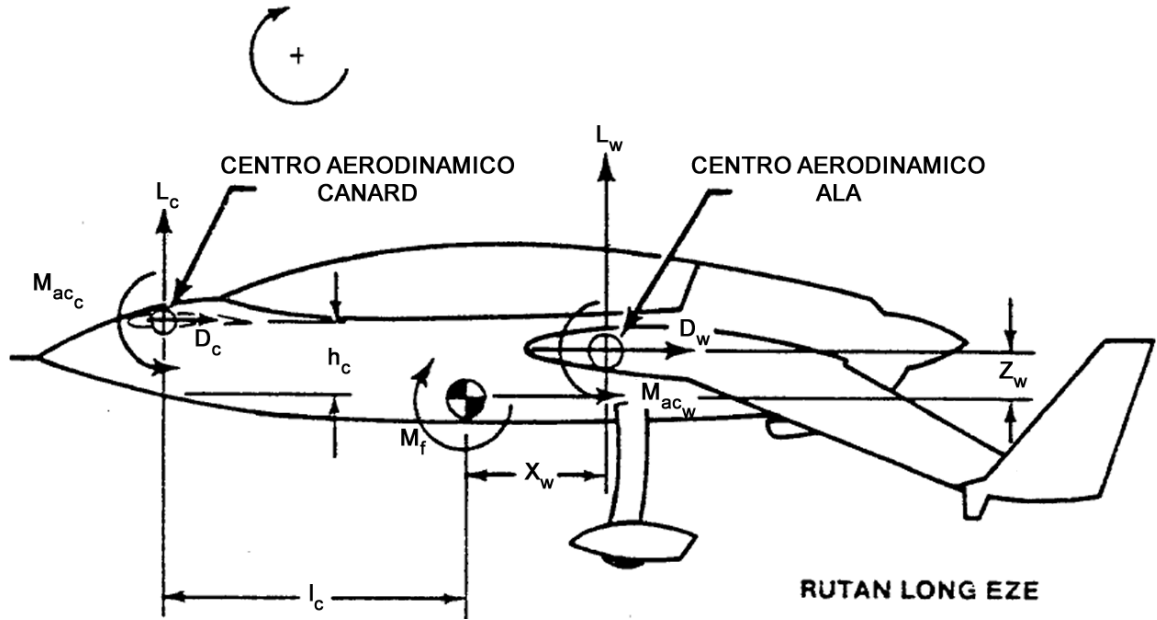
3.3.6 Configuración canard:

Desde el diseño realizado por los hermanos Wright, en el cual se desarrolló un importante trabajo para aeronaves con configuración canard, pero con una intervención casi nula en la búsqueda de nuevos y mejorados diseño de aeronave, y solo hasta principios de los años 70's. Uno de estos primeros sucesos con canard en cuanto a la fabricación en masa de estos mismos, se inició con la aeronave de combate Saab Viggen 37 (JA-37). Otros proyectos de aeronaves canard fueron el XB-70, el Mirage Milan, el TU-144, los grandes diseños de Burt Rutan (VariViggen, VariEze, LongEz, Defiant, Grizzly y el Solitaire), la innovación de aeronaves militares como el Grumman X-29 de flechamiento invertido en el ala principal y de aeronaves comerciales como el OMAC. En la actualidad, se continúan con extenuantes estudios para obtener con exactitud de cómo afecta el canard a la estabilidad longitudinal.

Son muchas las razones para seleccionar la configuración canard en nuevo diseño de aeronaves. Algunos de estos aspectos se muestran a continuación:

- a. Tanto la superficie del ala como la del canard contribuyen a la producción de sustentación.
- b. El centro de gravedad de la aeronave se sitúa entre el centro de presiones del ala y el canard, permitiendo que el centro de gravedad tenga un mayor desplazamiento alrededor de su eje longitudinal.
- c. La estructura de la aeronave se puede construir de una manera más sencilla y mucho más eficiente con respecto a la disposición de los controles de vuelo.
- d. Mejor control del movimiento de cabeceo alcanzando altos ángulos de ataque debido a que el canard no se encuentra bajo la estela turbulenta producida por el ala, teniendo características de pérdida más favorable haciendo que el canard entre en pérdida antes que el ala principal.
- e. El canard en mando libre (Sistema de Control Reversible) proporcionando cargas de alivio ante una ráfaga de viento.⁶

Figura 3.12 Momento de cabeceo para una aeronave tipo canard.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, página 35.

3.3.6.1 Ecuación de balance:

Para la figura 3.12, la ecuación de balance es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sum^+ M_{cg} = & -L_w X_w + D_w Z_w - M_{acw} + M_f + L_c l_c + D_c h_c \\ & - M_{acc} \end{aligned} \quad (3.50)$$

De la ecuación (3.50), los valores de $D_c h_c$ y M_{acc} son despreciables y se igualan a 0, dejándolos términos en función de coeficientes, entonces queda

$$\begin{aligned} C_{m_{cg}} = & \frac{M_{cg}}{q_w S_w \bar{c}_w} \\ = & -C_L \frac{X_w}{\bar{c}} + C_D \frac{Z_w}{\bar{c}} - C_{m_{acw}} + C_{m_f} + \frac{L_c l_c}{q_w S_w \bar{c}_w} \frac{q_c S_c}{q_c S_c} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Combinando los términos, obtenemos:

$$C_{m_{cg}} = -C_L \frac{X_w}{\bar{c}} + C_D \frac{Z_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac_w}} + C_{m_f} + C_{L_c} V_H \eta_c \quad (3.52)$$

ECUACION DE BALANCE

3.3.6.2 Ecuacion de estabilidad:

Aunque el canard pueda ser una configuracion balanceada, queda por comprobar si es estaticamente estable. Al tomar la ecuacion de balance y derivarla con respecto a C_L , obtendremos:

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = -\frac{X_w}{\bar{c}} + \frac{dC_D}{dC_L} \frac{Z_w}{\bar{c}} + \frac{dC_{m_f}}{dC_L} + \frac{dC_{L_c}}{dC_L} V_H \eta_c \quad (3.53)$$

ECUACION DE ESTABILIDAD

Afirmando que el centro de gravedad (CG) se encuentre verticalmente cerca a la cuerda del ala. Las ecuaciones de estabilidad y de balance se reducen respectivamente a:

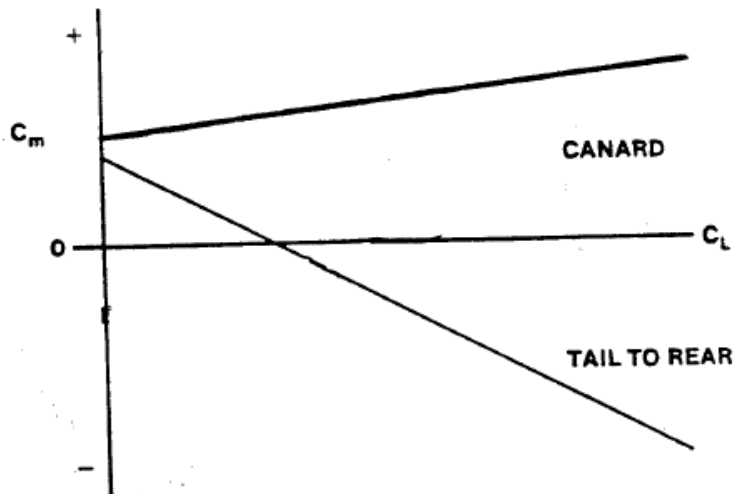
$$C_{m_{cg}} = \underbrace{-C_L \frac{X_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}}}_{\text{ala}} + \underbrace{C_{m_f}}_{\text{fuselaje}} + \underbrace{C_{L_c} V_H \eta_c}_{\text{canard}} \quad (3.54)$$

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = -\frac{X_w}{\bar{c}} + \frac{dC_{m_f}}{dC_L} + \frac{dC_{L_c}}{dC_L} V_H \eta_t \quad (3.55)$$

La ecuacion de estabilidad indica que la fuerza normal (o de sustentacion) del ala, ahora tiene una influencia de estabilizacion negativa, y el canard es un factor de desestabilizacion con signo positivo. El nombre que se le asigna al canard como estabilizador horizontal es incorrecto, puesto que realmente es un desestabilizador. El grado de inestabilidad presentado por el canard debe ser superado por la

combinación de ala fuselaje, para que la aeronave presente una estabilidad estática positiva $\frac{dC_m}{dC_L}$ (expresión con signo negativo). Lo anterior es mostrado gráficamente en la siguiente gráfica:

Grafica 3.10 Efectos del canard sobre el coeficiente de momento con respecto al coeficiente de sustentación.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, página 41.

3.3.6.3 Contribución de los componentes del canard.

Tomando por separado los componentes de la aeronave que contribuyen a la estabilidad se obtiene la derivada de estabilidad estática C_{m_α} .^{6,9}

3.3.6.3.1 Contribución del ala.

De la ecuación de estabilidad

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = -\frac{X_w}{\bar{c}} \quad (3.56)$$

De la ecuacion (3.8), se sabe que.

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = \frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}}$$

Como se desea dejar los terminos en fucion de C_{m_α} sustituimos la ecuacion (8) en la ecuacion de estabilidad del ala.

$$\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}} = -\frac{X_w}{\bar{c}} \quad (3.57)$$

Despejando C_{m_α} , se obtiene,

$$C_{m_\alpha} = -C_{L_{\alpha_w}} \frac{X_w}{\bar{c}} \quad (3.58)$$

Esta es la derivada de estabilidad estatica longitudinal, coefoiciente de momento de cabeceo con respecto al angulo de ataque, para el ala

Para equilibrar la aeronave necesitamos trabajar con la ecuacion de balance para determinar $C_{m_{0w}}$.

$$C_{m_{cg}} = -C_{L_w} \frac{X_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}} \quad (3.59)$$

Se sabe que $C_{L_w} = C_{L_{0w}} + C_{L_{\alpha_w}} \alpha_w$. por lo tano sustituyendo en (3.59), queda.

$$C_{m_{cg}} = -\left(C_{L_{0w}} + C_{L_{\alpha_w}} \alpha_w\right) \frac{X_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}} \quad (3.60)$$

Aplicando la condicion para estabilidad estatica se obtiene.

$$C_{m_{0w}} = -C_{L_{0w}} \frac{X_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}} \quad (3.61)$$

En donde:

$$C_{L_0} = C_{L_\alpha} |\alpha_0| \quad (3.62)$$

3.3.6.3.2 Contribución del Canard.

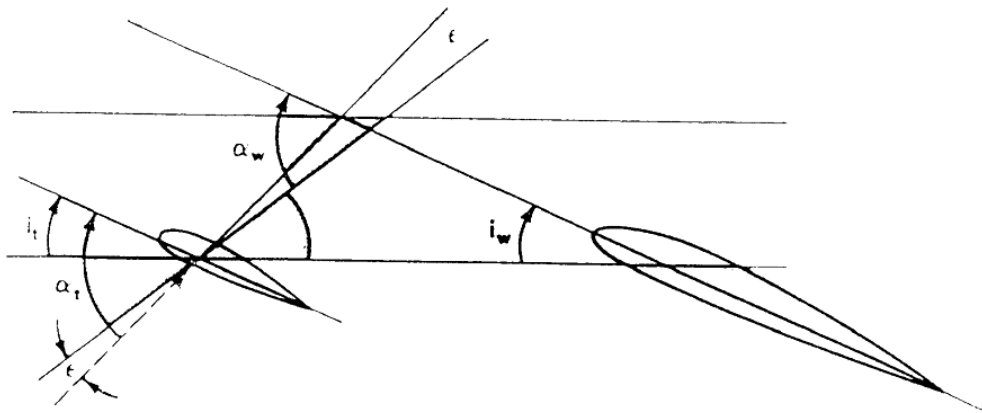
De manera similar que un estabilizador horizontal montado en el empenaje experimenta un campo de corriente descendente a consecuencia del ala (downwash), el canard generara una corriente ascendente por delante del ala (upwash). El campo de upwash tiene un efecto desestabilizante sobre la estabilidad longitudinal haciendo que la ecuación de estabilidad sea más positiva.^{6,9}

La contribución del canard desde la ecuación 6 puede ser analizada para los efectos de upwash, ϵ .

$$\frac{dC_{L_c}}{dC_L} V_H \eta_c = \frac{d(C_{L_{\alpha_c}} \alpha_t)}{dC_L} V_H \eta_t = C_{L_{\alpha_c}} V_H \eta_c \frac{d\alpha_c}{dC_L} \quad (3.63)$$

El ángulo de ataque del canard, α_c , puede ser expresado en términos de incidencia y upwash, como lo describe la siguiente figura:

Figura 3.13 Ángulos de ataque para una aeronave tipo canard.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 5, pagina 42.

$$\alpha_t - i_t - \epsilon = \alpha_w - i_w \quad (3.64)$$

Por consiguiente;

$$\alpha_t = \alpha_w - i_w + i_t + \varepsilon \quad (3.65)$$

La contribución del canard ahora es;

$$= C_{L\alpha_c} V_H \eta_c \frac{d(\alpha_w - i_w + i_t + \varepsilon)}{dC_L} \quad (3.66)$$

$$= C_{L\alpha_c} V_H \eta_c \left(\frac{1}{C_{L\alpha_w}} + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \frac{d\alpha_w}{dC_L} \right)$$

$$= C_{L\alpha_c} V_H \eta_c \left(\frac{1}{C_{L\alpha_w}} + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \frac{1}{a_w} \right) \quad (3.67)$$

Por consiguiente;

$$\frac{dC_{Lc}}{dC_L} V_H \eta_t = \frac{C_{L\alpha_c}}{C_{L\alpha_w}} V_H \eta_t \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \right) \quad (3.68)$$

Es importante aclarar que la interacción entre el canard y el ala es un aspecto crítico en el momento de crear nuevos diseños. El ala comprenderá un campo de corriente descendente (downwash) desde el canard sobre una porción del borde de ataque. La adecuación aerodinámica y la cuidadosa selección de un perfil aerodinámico es requerido para que la aeronave cumpla con los objetivos de diseño en todas las deflexiones del canard y los ajustes de flap en el ala, los canard por su configuración permiten ser aún más sensibles a los efectos de upwash y de downwash.^{6,9}

Ahora para determinar C_{m_α} de la superficie canard

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = \frac{dC_{L_c}}{dC_L} V_H \eta_t \quad (3.69)$$

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = \frac{C_{L_{\alpha_c}}}{C_{L_{\alpha_w}}} V_H \eta_t \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \right) \quad (3.70)$$

De la ecuación (3.8), se sabe que.

$$\frac{dC_{m_{cg}}}{dC_L} = \frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}}$$

Luego

$$\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_{\alpha_w}}} = \frac{C_{L_{\alpha_c}}}{C_{L_{\alpha_w}}} V_H \eta_t \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \right)$$

Por lo tanto.

$$C_{m_{\alpha_c}} = C_{L_{\alpha_c}} V_H \eta_t \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \right) \quad (3.71)$$

Para el cálculo de $C_{m_{0c}}$ de la ecuación (3.31)

$$C_{m_{0c}} = \eta V_H C_{L_{\alpha_c}} (\varepsilon_0 - i_w + i_t) \quad (3.72)$$

3.3.6.4 Cálculo de la estabilidad estática para una aeronave tipo canard:

Antes de continuar con los respectivos cálculos que comprobaran si nuestra aeronave tipo canard (Long-Ez), es estáticamente estable, se determinará con antelación algunos parámetros que tiene cierta

inherencia con las ecuaciones de estabilidad estática, teniendo en cuenta las condiciones de vuelos descritas con anterioridad.

- Coeficiente de Volumen del Canard:

$$V_H = \frac{X_t S_c}{S_w \bar{c}_w}$$

$$V_H = 0,339576982$$

- Angulo de Upwash:

$$\varepsilon = \frac{2C_{L_{0w}}}{\pi AR_w} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon = 0,016019979$$

- Razón de cambio del ángulo de upwash con respecto al ángulo de ataque:

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{2C_{L_{\alpha w}}}{\pi AR_w} \quad (3.27)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 0,458938586$$

Ya obtenidos estos datos, a continuación se procederá a hallar la estabilidad estática para el Long-Ez:

- Contribución del ala:

$$C_{m_\alpha} = -C_{L_{\alpha w}} \frac{X_w}{\bar{c}} \quad (3.73)$$

$$C_{m_{\alpha w}} = -3,313041801 \text{ } ^1/\text{rad}$$

$$C_{m_{0w}} = -C_{L_{0w}} \frac{X_w}{\bar{c}} - C_{m_{ac}} \quad (3.74)$$

$$C_{m_{0w}} = -0,067646975$$

- Contribucion del canard:

$$C_{m_{\alpha_c}} = C_{L_{\alpha_c}} V_H \eta_t \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_w} \right) \quad (3.75)$$

$$C_{m_{\alpha_c}} = 2,285095181 \text{ } 1/\text{rad}$$

$$C_{m_{0_c}} = \eta V_H C_{L_{\alpha_c}} (\varepsilon_0 - i_w + i_t) \quad (3.76)$$

$$C_{m_{0_c}} = 0,079764869$$

- Contribución del fuselaje:

$$C_{m_{\alpha_f}} = \frac{1}{36.52\bar{c}} \sum_{x=0}^{x=l_f} w_f^2 \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} dx \quad (3.77)$$

$$C_{m_{\alpha_f}} = 0,001699768 \text{ } 1/\text{rad}$$

$$C_{m_{0_f}} = \frac{k_2 - k_1}{36,5S\bar{c}_w} \sum_{x=0}^{x=l_f} w_f^2 (\alpha_{0_w} + i_f) \Delta x \quad (3.35)$$

$$C_{m_{0_f}} = 2,25639 * 10^{-5}$$

Entonces, el coeficiente de momento total de la aeronave con respecto al ángulo de ataque es;

$$C_{m_{\alpha}} = C_{m_{\alpha_w}} + C_{m_{\alpha_c}} + C_{m_{\alpha_f}}$$

$$C_{m_{\alpha}} = -1,026246853 \text{ } 1/\text{rad}$$

Y el coeficiente de momento cero total de la aeronave es:

$$C_{m_0} = C_{m_{0_w}} + C_{m_{0_c}} + C_{m_{0_f}}$$

$$C_{m_0} = 0,01214045$$

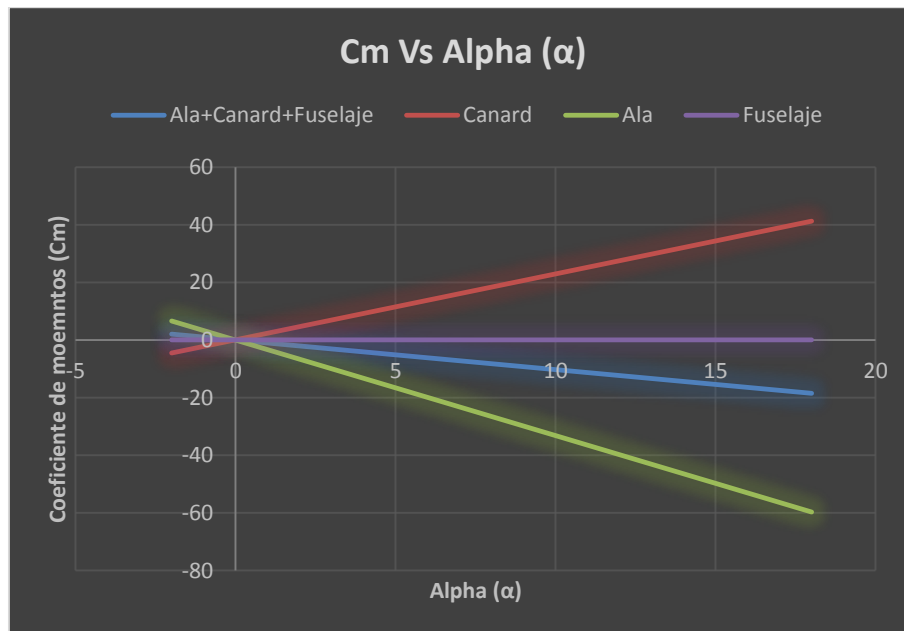
Para graficar los datos anteriores, realizamos la analogía con la ecuación de la recta:

$$y = xm + b;$$

Donde

- y Es la variable dependiente en unidades adimensionales.
- x Es la variable independiente unidades de grados.
- m Es la pendiente de la recta, para este caso es C_{m_α} .
- b Es la intersección en el eje de las ordenadas, para este caso es C_{m_0} .

Grafica 3.11 Estabilidad estática total de la aeronave tipo canard con la contribución de cada uno sus componentes.



Fuente: Autoridad propia.

De la grafica anterior se obtiene la estabilidad estatica total de la aeronave con la con la contribucion de cada uno de sus componentes (Ala, Canard y Fuselaje).

3.4 Derivadas de Estabilidad

Todas las ecuaciones paramétricas (2.121, 2.122, 2.123) dan la información necesaria para describir el movimiento de cualquier aeronave particular. Hay solamente un problema. Cuando se utiliza un modelo de túnel de viento para verificación, un factor de escala debe ser usado para encontrar los valores para la aeronave. Por consiguiente se dificulta, comparar la aeronave utilizando parámetros de estabilidad. En orden para eliminar este requerimiento un conjunto de ecuaciones no-dimensionales pueden ser derivadas.⁶ Por ejemplo:

Dada la ecuación paramétrica para momento de pitch (2.123)

$$\ddot{\theta} - M_q \dot{\theta} - M_u u - M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - M_{\alpha} \alpha = SC \quad (3.78)$$

Se permite derivar una ecuación en la cual todos los términos son no-dimensionales.

Los pasos en este proceso son:

1. Tomar cada parámetro de estabilidad y sustituirlos la relación de coeficientes y tomar la derivada en la condición inicial, con otras variables ($u, \alpha, \dot{\alpha}, \delta_e$) se mantienen constantes. De la aerodinámica subsónica:

Observando el cambio en este momento de cabeceo debido a un cambio en la razón de cabeceo (como ejemplo) en la condición inicial.

$$M_q = \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial \left(C_m \frac{1}{2} \rho U^2 S c \right)}{\partial q} \bigg|_0 \quad (3.79)$$

C_m es la única variable que es dependiente de q , por lo tanto,

$$M_q = \frac{\rho U^2 S c}{2 I_y} \frac{\partial C_m}{\partial q} \quad (3.80)$$

2. Término parcial adimensionalizado,

$$\frac{\partial C_m}{\partial q} \text{ tiene dimension} = \frac{\text{adimensional}}{\text{rad/seg}} = \text{seg}$$

Para adimensionalizar el término parcial, Ciertos factores de compensación son habitualmente utilizados (tabla 2). En este caso el factor de compensación es

$$\frac{c}{2U_0} \frac{[ft]}{[ft/seg]} = \text{seg}$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación (157) por el factor de compensación se obtiene,

$$M_q = \frac{\rho U_0^2}{2I_y} \frac{\frac{c}{2U_0}}{\frac{c}{2U_0}} \frac{\partial C_m}{\partial q} \rightarrow \text{Este termino es adimensional} \quad (3.81)$$

Comprobando,

$$\frac{\partial C_m}{\partial \left(\frac{cq}{2U_0} \right)} = \frac{\text{adimensional}}{\frac{ft/seg}{ft/seg}} = \text{adimensional}$$

Esta es llamada una derivada de estabilidad y es escrita,

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial \left(\frac{cq}{2U_0} \right)} \quad (3.82)$$

La forma básica no-dimensional C_{m_q} es importante por la correlación entre la geometría similar de la estructura de la aeronave o la misma estructura en diferentes condiciones de vuelo es fácilmente logrado con las derivadas de estabilidad (estas no pueden ser fácilmente hechas con los parámetros de estabilidad). Adicionalmente, los datos de las derivadas de estabilidad aerodinámicas desde, pruebas de túnel de

viento, pruebas de vuelo y análisis teóricos son usualmente presentados en forma no dimensional.⁶

Las derivadas de estabilidad generalmente caen dentro de dos clases: estática y dinámica. Las derivadas estáticas surgen desde, la posición de la estructura con respecto al viento relativo (i.e. $C_{L_\alpha}, C_{m_\alpha}$). Mientras que las derivadas dinámicas surgen a partir del movimiento (velocidades) de la estructura (i.e. $C_{L_{\dot{\alpha}}}, C_{m_{\dot{u}}}$).

3. El termino completo con la derivada de estabilidad es:

$$M_q q = \underbrace{\frac{\rho U_0^2 S c}{2 I_y}}_{\text{constantes}} \underbrace{\frac{c q}{2 U_0}}_{\text{variable adimensional}} \underbrace{C_{m_q}}_{\text{derivada de estabilidad adimensional}} \quad (3.83)$$

4. Se puede hacer lo mismo para cada uno de los términos en las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo,

$$M_u = \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial \left(C_m \frac{1}{2} \rho U^2 S c \right)}{\partial u} \bigg|_0 \quad (3.84)$$

Desde que ambas C_m y U sean función de u , entonces

$$M_u = \frac{\rho S c}{2 I_y} \frac{\partial (C_m U^2)}{\partial u} \bigg|_0 \quad (3.85)$$

$$M_u = \frac{\rho S c}{2 I_y} \left[U_0^2 \frac{\partial C_m}{\partial u} + 2 C_{m_0} U_0 \right] \quad (3.86)$$

$$\therefore M_u = \frac{\rho U_0^2 S c}{2 I_y} \left[\frac{\partial C_m}{\partial u} + \frac{2 C_{m_0}}{U_0} \right] \quad (3.87)$$

Pero $C_{m_0} = 0$ desde que la condición inicial sea estado estacionario. El factor de compensación para este caso es $1/U_0$.

$$\therefore M_u u = \frac{\rho U_0^2 S c}{2 I_y} \frac{1}{U_0} \frac{\partial C_m}{\partial \left(\frac{u}{U_0}\right)} u \quad (3.88)$$

5. Una vez todos los términos hayan sido derivados, ellos son sustituidos dentro de la ecuación original y multiplicados por,

$$\frac{2 I_y}{\rho U_0^2 S c}$$

Lo cual da,

$$\frac{2 I_y}{\rho U_0^2 S c} \ddot{\theta} - \frac{c}{2 U_0} C_{m_q} \dot{\theta} - \frac{1}{U_0} C_{m_u} u - \frac{c}{2 U_0} C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} - C_{m_{\alpha}} \alpha = S C \quad (3.89)$$

Los factores de compensación para todas las variables son listados en la tabla 2.

Variable	Factor de Compensación	Variable No Dimensional
$q \text{ (rad/seg)}$	$\frac{c}{2 u_0}$	$\frac{c q}{2 u_0} = \frac{c \dot{\theta}}{2 u_0}$
$\dot{\alpha} \text{ (rad/seg)}$	$\frac{c}{2 u_0}$	$\frac{c \dot{\alpha}}{2 u_0}$
$u \text{ (m/seg)}$	$\frac{1}{u_0}$	$\frac{u}{u_0}$
$\alpha \text{ (rad)}$	No aplica	α

Tabla 3-5 Factores de compensación.

Forma de las derivadas de estabilidad de las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento simplificadas en forma de derivadas de estabilidad son mostradas en la tabla 3. La derivación de estas ecuaciones han sido presentadas para dar un entendimiento de su origen y que ellas representan. No es necesario tener que derivar todas y cada una de las ecuaciones. Sin embargo es importante entender muchos factores acerca de las ecuaciones no-dimensionales.

Derivadas longitudinales.

$$C_{D_u}, C_{D_\alpha}, C_{D_{\dot{\alpha}}}, C_{D_q}$$

$$C_{L_u}, C_{L_\alpha}, C_{L_{\dot{\alpha}}}, C_{L_q}$$

$$C_{m_u}, C_{m_\alpha}, C_{m_{\dot{\alpha}}}, C_{m_q}$$

Las derivadas de estabilidad pueden ser divididas dentro de derivadas de "estabilidad", las cuales describen la tendencia natural a retornar al equilibrio cuando se perturba, derivadas de fuerza, derivadas de control, derivadas de amortiguamiento y derivadas de flujo inestable.

Derivadas longitudinales de estabilidad

$$C_{m_u}, C_{m_\alpha}$$

Derivadas longitudinales de fuerza

$$C_{D_u}, C_{D_\alpha}, C_{L_u}, C_{L_\alpha}$$

Derivadas longitudinales de control

$$C_{D_{\delta_e}}, C_{L_{\delta_e}}, C_{m_{\delta_e}}$$

Derivadas longitudinales de amortiguamiento

$$C_{D_q}, C_{L_q}, C_{m_q}$$

Derivadas longitudinales de flujo inestable

$$C_{D_{\dot{\alpha}}}, C_{L_{\dot{\alpha}}}, C_{m_{\dot{\alpha}}}$$

ECUACIONES LONGITUDINALES

$(\theta)(u)(\alpha)$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{"DRAG"} & -C_{D_\theta}\theta & -\frac{2m}{\rho U_0^2 S}\dot{u} - \frac{1}{U_0}(C_{D_u} + 2C_D)u - C_{D_\alpha}\alpha = 0 \\
 \text{"LIFT"} & \left(\frac{2m}{\rho U_0^2} - \frac{c}{2U_0}C_{L_q}\right)\dot{\theta} & -\frac{1}{U_0}(C_{L_u} - 2C_{L_0})u - \left(\frac{2m}{\rho U_0^2} + \frac{c}{2U_0}C_{L_{\dot{\alpha}}}\right)\dot{\alpha} - C_{L_\alpha}\alpha = 0 \\
 \text{"PITCH"} & \frac{2I_y}{\rho U_0^2 S c}\ddot{\theta} - \frac{c}{2U_0}C_{m_q}\dot{\theta} & -\frac{1}{U_0}C_{m_u}u - \frac{c}{2U_0}C_{m_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha} - C_{m_\alpha}\alpha = 0
 \end{array}$$

3.4.1 Derivación de la Ecuaciones de movimiento para las derivadas de estabilidad longitudinales.

Expresiones para C_x y C_z .

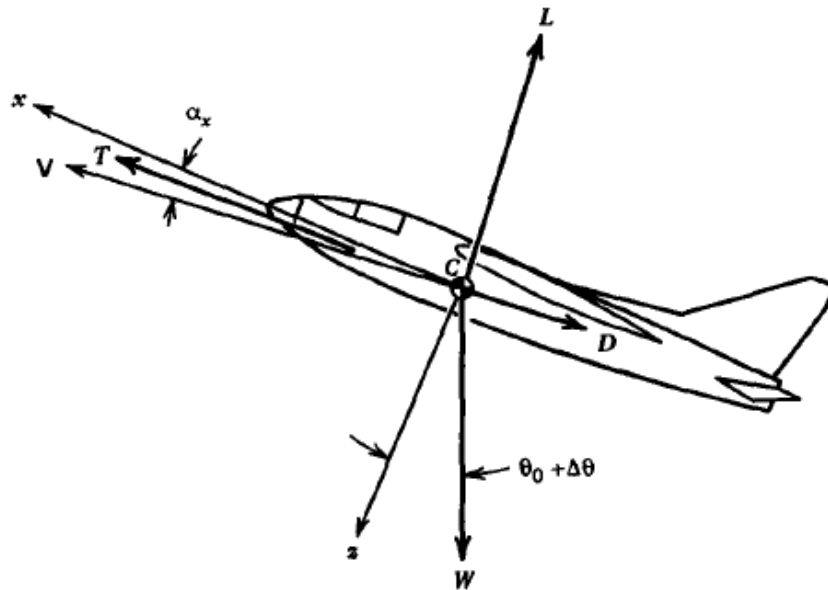
Por conveniencia, quisiéramos que las derivadas de C_x y C_z estuvieran en términos de sustentación y arrastre. La relevancia de las fuerzas se muestra en la figura 3.26, Como indica la línea de empuje no se encuentra necesariamente sobre el eje x. sin embargo, el ángulo entre ellos es generalmente pequeño y lo asumiríamos como cero. Con esta consideración y para α_x ,²¹ obtenemos.

$$C_x = C_T - C_D \quad (3.90)$$

$$C_z = -(C_L) \quad (3.91)$$

Donde $C_T = T/qS$, Coeficiente de empuje.

Figura 3.14 Fuerzas en vuelo simétrico.



Fuente: ETKIN, Bernard; REID, Lloyd Duff. Dynamics of flight: stability and control. Pagina 130.

²¹ETKIN, Bernard; REID, Lloyd Duff. Dynamics of flight: stability and control. New York: Wiley, 1996.

3.4.1.1 Derivadas con respecto al ángulo de ataque (α).

Las derivadas con respecto al ángulo ataque describen el cambio que toma lugar en las fuerzas y momentos cuando el ángulo de ataque de la aeronave se incrementa. Normalmente hay un incremento en la sustentación y en la resistencia y un momento de cabeceo negativo.

- Derivada de $C_{x\alpha}$.

Por definición, $C_{x\alpha} = (dC_x/d\alpha)_0$, donde el subíndice cero indica que la derivada es evaluada cuando las cantidades de perturbación son cero. Por lo tanto,

$$\frac{dC_x}{d\alpha} = \frac{C_T}{d\alpha} + C_L + \alpha_x \frac{dC_L}{d\alpha} - \frac{dC_D}{d\alpha} \quad (3.92)$$

Podemos asumir que el coeficiente de empuje es independiente de α_x así que $(dC_T/d\alpha) = 0$.

$$C_{x\alpha} = \left(\frac{dC_x}{d\alpha} \right)_0 = C_{L_0} - \left(\frac{dC_D}{d\alpha} \right)_0 \quad (3.93)$$

Con $\alpha_x = 0$ en ejes de estabilidad. Cuando la resistencia está dada por una polar parabólica en la forma $C_D = C_{D_0} + C_L^2 / \pi A R e$, luego.

$$C_{x\alpha} = C_{L_0} - \frac{2C_{L_0}}{\pi A R e} C_{L\alpha} \quad (3.94)$$

- Derivada $C_{z\alpha}$.

Por definición, $C_{z\alpha} = (C_z/d\alpha)_0$, de la ecuación () obtenemos.

$$\frac{dC_z}{d\alpha} = - \left(C_{L\alpha} + C_D + \alpha_x \frac{dC_D}{d\alpha} \right) \quad (3.95)$$

Por lo tanto

$$C_{z\alpha} = - (C_{L\alpha} + C_{D_0}) \quad (3.96)$$

C_{D_0} Será frecuentemente despreciable comparado con $C_{L\alpha}$.

En donde $C_{L\alpha}$, se define como la pendiente de la curva de sustentación con respecto al ángulo de ataque del total de la aeronave, es decir que sus componentes son la contribución del ala, fuselaje y del empenaje y está dada por.

$$C_{L\alpha} = \underbrace{C_{L\alpha_{WB}}}_{\text{ala, fuselaje}} + \underbrace{C_{L\alpha_h} \eta V_H \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}_{\text{empenaje}} \quad (3.96.1)$$

El subíndice WB indica la relación entre la envergadura del ala y el diámetro del fuselaje, es decir la contribución de los esos dos componentes una buena aproximación para dicha relación se puede dar como.

$$C_{L\alpha_{WB}} = k_{WB} C_{L\alpha_w} \quad (3.96.2)$$

Donde

$$k_{WB} = 1 - 0,25 \left(\frac{d}{b}\right)^2 + 0,025 \left(\frac{d}{b}\right) \quad (3.96.3)$$

- Derivada C_{m_α} .

Esta es la derivada de estabilidad estática, la cual fue desarrollada con mayor importancia en el apartado de estabilidad estática longitudinal para determinar su origen y su efecto en la estabilidad de una aeronave.

3.4.1.2 Derivadas con respecto a la velocidad(u).

La resistencia, la sustentación y el momento de cabeceo varían con cambios en la velocidad del avión, las fuerzas aerodinámicas y fuerzas propulsivas actuando sobre la aeronave a lo largo del eje de cuerpo X son la fuerza de resistencia aerodinámica y el empuje.^{9,10}

- Derivada C_{x_u}

El cambio en la fuerza en X debido al cambio en la velocidad se puede expresar como.

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\partial D}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial u} \quad (3.97)$$

La derivada $\partial X/\partial u$ es llamada la derivada de la velocidad de amortiguamiento. La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\rho S}{2} \left(u_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2u_0 C_{D_0} \right) + \frac{\partial T}{\partial u} \quad (3.98)$$

Donde el subíndice 0 indica la condición de referencia. Expresando $\partial X/\partial u$ en forma de coeficientes da.

$$C_{x_u} = -[C_{D_u} + 2C_{D_0}] + C_{T_u} \quad (3.99)$$

Donde.

$$C_{D_u} = \frac{\partial C_D}{\partial (u/u_0)} \quad C_{T_u} = \frac{\partial C_T}{\partial (u/u_0)}$$

Son los cambios en los coeficientes de resistencia y empuje por la velocidad hacia adelante. Estos coeficientes se han hecho adimensionales derivando con respecto a u/u_0 . El coeficiente C_{D_u} se puede estimar desde un gráfico del coeficiente de resistencia en contra al número Mach.¹⁰

$$C_{D_u} = M \frac{\partial C_D}{\partial M} \quad (3.100)$$

Donde **M** es el numero Mach de interés. El término para el empuje C_{T_u} es cero para vuelos sin motor y también es una buena aproximación para aeronaves potenciadas por motores a reacción.

- Derivada C_{z_u}

El cambio de la fuerza en Z con respecto a la velocidad hacia adelante se puede mostrar como

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{1}{2} \rho S u_0 [C_{L_u} + 2C_{L_0}] \quad (3.101)$$

O en forma de coeficiente.

$$C_{z_u} = -[C_{L_u} + 2C_{L_0}] \quad (3.102)$$

El coeficiente C_{L_u} surge desde el cambio en el coeficiente de sustentación con respecto al número Mach. C_{L_u} Se puede estimar desde la fórmula de Prandtl-Glauert la cual corrige la incompresibilidad del coeficiente de sustentación para efectos del número Mach.

$$C_L = \frac{C_L|_{M=0}}{\sqrt{1-M^2}} \quad (3.103)$$

Derivando el coeficiente de sustentación con respecto al número Mach se obtiene.

$$\frac{\partial C_L}{\partial M} = \frac{M}{1-M^2} C_L \quad (3.104)$$

Pero

$$C_{L_u} = \frac{\partial C_L}{\partial (u/u_0)} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial C_L}{\partial \left(\frac{u}{a}\right)}$$

$$C_{L_u} = M \frac{\partial C_L}{\partial M} \quad (3.105)$$

Donde (a) es la velocidad del sonido.

Por lo tanto C_{L_u} se puede expresar como.

$$C_{L_u} = \frac{M^2}{1-M^2} C_{L_0} \quad (3.106)$$

Este coeficiente puede ser despreciado a vuelos a bajas velocidades.

- Derivada C_{m_u} .

El cambio de el momento de cabeceo debido a las variaciones en la velocidad hacia adelante se puede expresar como

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u$$

O

$$\frac{\partial M}{\partial u} = C_{m_u} \rho S \bar{c} u_0 \quad (3.107)$$

El coeficiente C_{m_u} se puede expresar como

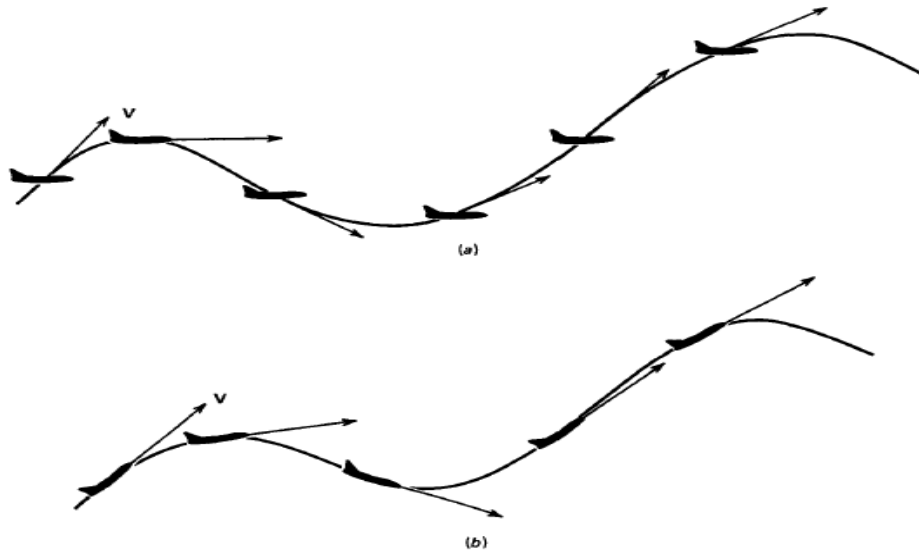
$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial M} M \quad (3.108)$$

El coeficiente C_{m_u} depende del número Mach pero también es afectado por las propiedades elásticas de la estructura de la aeronave.

3.4.1.3 Derivadas con respecto a la razón de cabeceo (q).

Estas derivadas representan los efectos aerodinámicos que acompañan la rotación de la aeronave alrededor del eje en dirección de la envergadura a través del centro de gravedad mientras α_x se reduce a cero. En la figura 3.15b muestra el caso general en la que una trayectoria de vuelo es arbitraria. Esta derivaría estar en contraste con la situación ilustrada en la figura 3.15a donde $q = 0$ mientras que α_x está cambiando.^{9,10}

Figura 3.15a) Movimiento con $q = 0$, pero variando α ; b) Movimiento con $\alpha = 0$, pero variando q .



Fuente: ETKIN, Bernard; REID, Lloyd Duff. Dynamics of flight: stability and control. Pagina 135.

Los coeficientes de estabilidad C_{z_q} y C_{m_q} representan el cambio de la fuerza en Z y momento de cabeceo con respecto a la velocidad de cabeceo (q). Las características aerodinámicas de ambos, ala y el empenaje son afectados por el movimiento de cabeceo de la aeronave.

La referencia (métodos) muestra que las derivadas C_{L_q} y C_{m_q} , pueden ser considerada como la sumatoria de las contribuciones del ala y empenaje, el efecto del fuselaje es demasiado pequeño para ser tomado en cuenta.

Por lo tanto.

$$C_{L_q} = C_{L_{qw}} + C_{L_{qh}} \quad (3.109)$$

$$C_{m_q} = C_{m_{qw}} + C_{m_{qh}} \quad (3.110)$$

Los subíndices w-h indican que son los términos que corresponden al ala y empenaje respectivamente.

- Contribución del Ala.

Derivada $C_{Z_{qW}}$.

Para la contribución del ala, las referencias (5,6 de métodos) muestran que.²²

$$C_{L_{qW}} = \left(\frac{AR + 2 \cos \Lambda_{c/4}}{AR * B + 2 \cos \Lambda_{c/4}} \right) * \left(\frac{1}{2} + \frac{2X_w}{\bar{c}} \right) * C_{L_{\alpha W}} \quad (3.111)$$

Por consiguiente.

$$C_{Z_{qW}} = -C_{L_{qW}} \quad (3.112)$$

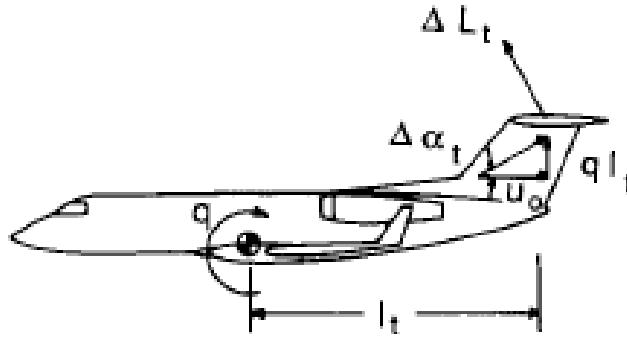
Derivada $C_{m_{qW}}$.

De igual manera, para la contribución del ala, las referencias (5,6 de métodos) muestran que.

$$C_{m_{qW}} = -k C_{L_{\alpha W}} \cos \Lambda_{c/4} \left[\frac{AR \left[2 \left(\frac{X_w}{\bar{c}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X_w}{\bar{c}} \right) \right]}{AR + 2 \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{1}{24} \frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR + 6 \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{1}{8} \right] * \left[\frac{\frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR * B + \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{3}{B}}{\frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR + 6 \cos \Lambda_{c/4}} + 3} \right] \quad (3.113)$$

²²**ROSKAM, JAN.**: *Methods for estimating stability and control derivatives of conventional subsonic airplanes*. Lawrence, Kansas, EE.UU: University of Kansas. 1971.

Figura 3.16 Contribución del empenaje a la razón de cabeceo.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 104.

- Contribución del Empenaje.

Derivada $C_{z_{q_h}}$

Como se muestra en la figura (3.7), la razón de cabeceo (q) causa un cambio en el ángulo de ataque en el empenaje, el cual resulta en un cambio en la fuerza de sustentación actuando sobre el empenaje:

$$\Delta L_t = C_{L_{\alpha_t}} \Delta \alpha_t Q_t S_t$$

$$\Delta Z = -\Delta L_t = -C_{L_{\alpha_t}} \frac{q l_t}{u_0} Q_t S_t$$

$$C_z = \frac{Z}{Q_w S}$$

$$\Delta C_z = -C_{L_{\alpha_t}} \frac{q l_t}{u_0} \eta \frac{S_t}{S}$$

$$C_{z_q} \equiv \frac{\partial C_z}{\partial (q \bar{c} / 2 u_0)} = \frac{2 u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_z}{\partial q}$$

$$C_{z_{q_h}} = -2 C_{L_{\alpha_t}} \eta V_H \quad (3.114)$$

Derivada $C_{m_{q_h}}$.

El momento de cabeceo debido al cambio en la sustentación de la cola se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta M_{cg} &= -l_t \Delta L_t \\ \Delta C_{mcg} &= -V_H \eta C_{L_{\alpha_t}} \frac{q l_t}{u_0} \\ C_{m_q} &\equiv \frac{\partial C_m}{\partial (q \bar{c} / 2 u_0)} = \frac{2 u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial q} \\ C_{m_{q_h}} &= -2 C_{L_{\alpha_t}} \eta V_H \frac{l_t}{\bar{c}} \equiv C_{Z_q} \frac{l_t}{\bar{c}}\end{aligned}\tag{3.115}$$

Las ecuaciones (3.114) y (3.115) representan la contribución del empenaje a $C_{Z_{q_h}}$ y $C_{m_{q_h}}$ respectivamente.

De la ecuación (3.91) se puede decir que.

$$C_{Z_q} = -C_{L_q}$$

Por consiguiente de las ecuaciones (3.111) y (3.112) se puede definir que $C_{Z_{q_w}}$ esta dado por.

$$C_{Z_{q_w}} = -[C_{L_{q_w}}]\tag{3.116}$$

En resumen las derivada C_{Z_q} y C_{m_q} se define por.

$$C_{Z_q} = C_{Z_{q_w}} + C_{Z_{q_h}}\tag{3.117}$$

$$C_{m_q} = C_{m_{q_w}} + C_{m_{q_h}}\tag{3.118}$$

Respectivamente.

3.4.1.4 Derivadas con respecto a la razón de cambio del ángulo de ataque ($\dot{\alpha}$).

Los coeficientes de estabilidad $C_{Z\dot{\alpha}}$ y $C_{m\dot{\alpha}}$ le deben su existencia al desfase del downwash del ala obtenido del empenaje. Como el ángulo de ataque del ala cambia, la circulación alrededor del ala será alterada. El cambio en la circulación altera el downwash en el ala; sin embargo, este toma un tiempo finito cuando ocurre la aceleración.⁹

- Derivada $C_{Z\dot{\alpha}}$

El desfase en el ángulo de ataque en el empenaje se puede expresar como:

$$\Delta\alpha_t = \frac{d\varepsilon}{dt} \Delta t$$

Dónde.

$$\Delta t = l_t / u_0$$

O

$$\Delta\alpha_t = \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{l_t}{u_0} = \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \frac{l_t}{u_0}$$

$$\Delta\alpha_t = \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0}$$

$$\Delta L_t = C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t Q_t S_t$$

$$\Delta C_z = -\frac{\Delta L_t}{Q_w S} = -C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t \eta \frac{S_t}{S}$$

$$\Delta C_z = -C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \eta \frac{S_t}{S}$$

$$C_{Z\dot{\alpha}} = \frac{\partial C_z}{\partial (\dot{\alpha} \bar{c} / 2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_z}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$C_{Z\dot{\alpha}} = -2V_H \eta C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (3.119)$$

- Derivada $C_{m\dot{\alpha}}$.

El momento de cabeceo debido al desfase en el campo de downwash para el empenaje se puede calcular como sigue:

$$\Delta M_{cg} = -l_t \Delta L_t = -l_t C_{L\alpha_t} \Delta \alpha_t Q_t S_t$$

$$\Delta C_{m_{cg}} = -V_H \eta C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0}$$

$$C_{m\dot{\alpha}} = \frac{\partial C_m}{\partial (\dot{\alpha} \bar{c} / 2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$C_{m\dot{\alpha}} = -2V_H \eta C_{L\alpha_t} \frac{l_t}{\bar{c}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \equiv C_{Z\dot{\alpha}} \frac{l_t}{\bar{c}} \quad (3.120)$$

Los coeficientes de estabilidad C_{z_q} , C_{m_q} , $C_{Z\dot{\alpha}}$ y $C_{m\dot{\alpha}}$ todas se oponen al movimiento del vehículo, por lo tanto pueden ser consideradas como términos de amortiguamiento.

En la tabla (3-6) se presenta un resumen de los coeficientes de estabilidad longitudinal más importantes.

	Derivadas en X	Derivadas en Z	Derivadas de Momentos
u	$C_{X_u} = -2 * C_D$	$C_{Z_u} = -2C_{L_0}$	0
α	$C_{X_\alpha} = C_{L_0} - \left(\frac{2C_{L_0}C_{L_\alpha}}{\pi A Re} \right)$	$C_{Z_\alpha} = -(C_{L_\alpha} + C_D)$	$C_{m_\alpha} = \underbrace{C_{L_{\alpha_w}} \left(\frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right)}_{Ala} + \underbrace{C_{m_{\alpha_f}}}_{Fuselaje} - \underbrace{\eta V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right)}_{Empenaje}$
$\dot{\alpha}$	0	$C_{Z_{\dot{\alpha}}} = -2\eta C_{L_{\alpha_c}} V_H \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$	$C_{m_{\dot{\alpha}}} = -2\eta C_{L_{\alpha_c}} V_H \frac{l_T}{\bar{c}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$
q	0	$C_{Z_q} = C_{Z_{q_w}} + C_{Z_{q_h}}$	$C_{m_q} = C_{m_{q_w}} + C_{m_{q_h}}$

Tabla 3-6 Coeficientes de derivadas de estabilidad.

3.4.2 Cálculos de las derivadas de estabilidad longitudinal

Para realizar el cálculo de las derivadas de estabilidad se debe determinar primero bajo qué condiciones las vamos a calcular, dichas condiciones se dividen en Características de la aeronave y condiciones de vuelo, las cuales ya fueron descritas en la sección (tal) y se pueden encontrar en las tablas ().

3.4.2.1 Cálculos de las derivadas con respecto al ángulo de ataque (α).

Como se ha mencionado anteriormente las derivadas con respecto a α son C_{x_α} , C_{z_α} y C_{m_α} . En donde C_{m_α} ya se calculó para determinar la estabilidad estática longitudinal.

Calculo de C_{x_α}

$$C_{x_\alpha} = C_{L_0} - \frac{2C_{L_0}}{\pi A R e} C_{L_\alpha}$$

$$C_{x_\alpha} = 0,008416405$$

Calculo de C_{z_α} .

$$C_{z_\alpha} = -(C_{L_\alpha} + C_{D_0})$$

$$C_{z_\alpha} = -6,40976118$$

3.4.2.2 Calculo de las derivadas con respecto a la velocidad hacia adelante (u).

Las derivadas con respecto a la velocidad son C_{x_u} , C_{z_u} y C_{m_u} .

Calculo de C_{x_u} .

$$C_{x_u} = -[C_{D_u} + 2C_{D_0}]$$

En dónde. $C_{D_u} = M \frac{\partial C_D}{\partial M}$

Para condiciones de vuelo con una velocidad de Mach menor a 0,6 ($M < 0,6$),

$$C_{D_u} = 0.$$

Por lo tanto,

$$C_{x_u} = -[2C_{D_0}]$$

$$C_{x_u} = -0,04850563$$

Calculo de C_{z_u} .

$$C_{z_u} = -[2C_{L_0}]$$

$$C_{z_u} = -0,286152131$$

Calculo de C_{m_u} .

$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial M} M$$

En rangos subsónicos, el cambio en C_m con respecto al número Mach son frecuentemente despreciables.

Por consiguiente,

$$C_{m_u} = 0$$

3.4.2.3 *Calculo de las derivadas de estabilidad con respecto a la razón de cabeceo (q).*

Las derivadas con respecto a (q) son, C_{x_q} , C_{z_q} y C_{m_q} , en donde C_{x_q} en margen subsónico es usualmente despreciable.

Calculo C_{z_q} .

$$C_{z_q} = C_{z_{q_w}} + C_{z_{q_c}}$$

En donde,

$$C_{z_{q_w}} = - \left(\frac{AR + 2 \cos \Lambda_{c/4}}{AR * B + 2 \cos \Lambda_{c/4}} \right) * \left(\frac{1}{2} + \frac{2X_w}{\bar{c}} \right) * C_{L_{\alpha_w}}$$

Y

$$C_{z_{q_c}} = -2C_{L_{\alpha_t}} \eta V_H$$

$$C_{z_q} = -11,81700794$$

Calculo de C_{m_q} .

$$C_{m_q} = C_{m_{q_w}} + C_{m_{q_c}}$$

En donde,

$$C_{m_{q_w}} = -k C_{L_{\alpha_w}} \cos \Lambda_{c/4} \left[\frac{AR \left[2 \left(\frac{x_w}{\bar{c}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_w}{\bar{c}} \right) \right]}{AR + 2 \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{1}{24} \frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR + 6 \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{1}{8} \right] \\ * \left[\frac{\frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR * B + \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{3}{B}}{\frac{AR^3 \tan \Lambda_{c/4}^2}{AR + 6 \cos \Lambda_{c/4}} + 3} \right]$$

Y

$$C_{m_{q_c}} = C_{z_q} \frac{l_t}{\bar{c}}$$

$$C_{m_q} = -10,82150435$$

3.4.2.4 *Calculo de las derivadas con respecto a la razón de cambio del ángulo de ataque ($\dot{\alpha}$).*

Las derivadas respecto a ($\dot{\alpha}$) son $C_{X_{\dot{\alpha}}}$, $C_{Z_{\dot{\alpha}}}$ y $C_{m_{\dot{\alpha}}}$, aquí nuevamente encontramos que la derivada $C_{m_{\dot{\alpha}}}$ por las condiciones de vuelo a baja velocidad, se puede despreciar.

Calculo de $C_{Z_{\dot{\alpha}}}$

$$C_{Z_{\dot{\alpha}}} = -2V_H \eta C_{L_{\alpha_t}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$$

$$C_{Z_{\dot{\alpha}}} = -1,437645644$$

Calculo de $C_{m_{\dot{\alpha}}}$.

$$C_{m_{\dot{\alpha}}} = C_{Z_{\dot{\alpha}}} \frac{l_t}{\bar{c}}$$

$$C_{m_{\dot{\alpha}}} = -3,203044699$$

Derivadas De Estabilidad	
C_{X_u}	-0,04850563
$C_{X_{\dot{\alpha}}}$	0,008416405
C_{Z_u}	-0,286152131
$C_{Z_{\dot{\alpha}}}$	-6,40976118
$C_{Z_{\ddot{\alpha}}}$	-1,437645644
C_{Z_q}	-11,81700794
$C_{m_{\alpha}}$	-1,026246853
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-3,203044699
C_{m_q}	-10,82150435

Tabla 3-7 Cálculos de los coeficientes de las derivadas de estabilidad.

3.5 ESTABILIDAD DINAMICA

La dinámica se interesa con la evolución en el tiempo del movimiento de un sistema físico. Una aeronave es como tal un sistema y el comportamiento de su estabilidad dinámica puede ser predicho a través del análisis matemático de las ecuaciones de movimiento de la aeronave y verificado a través de pruebas de vuelo.

En los viejos buenos tiempos cuando una aeronave era simple, todas exhibían cinco características de modos de movimiento dinámico, dos modos longitudinales y tres latero-direccionales. Los dos modos longitudinales son periodo corto y fugoide; los tres modos latero-direccionales son Dutch roll, espiral y roll.

Como los sistemas de control de las aeronaves incrementan en complejidad, es concebible que uno o más de estos modos puedan no existir como un modo longitudinal o latero-direccional dominante. Frecuentemente los efectos de más alto orden en los complejos sistemas de control desaparecerán rápidamente y dejando los cinco modos básicos de movimiento. Cuando no es este caso, el desarrollo de

procedimientos especiales debe ser requeridos para describir significativamente el movimiento dinámico de una aeronave.⁶

3.5.1 Estabilidad Estática Vs Estabilidad Dinámica.

La estabilidad estática de un sistema físico se interesa con la reacción inicial de un sistema cuando es desplazado de una condición de equilibrio. El sistema podría exhibir cualquiera de estos:

Estabilidad Estática Positiva – Tendencia a regresar a la condición inicial

Estáticamente inestable – Tendencia a divergir de la condición inicial

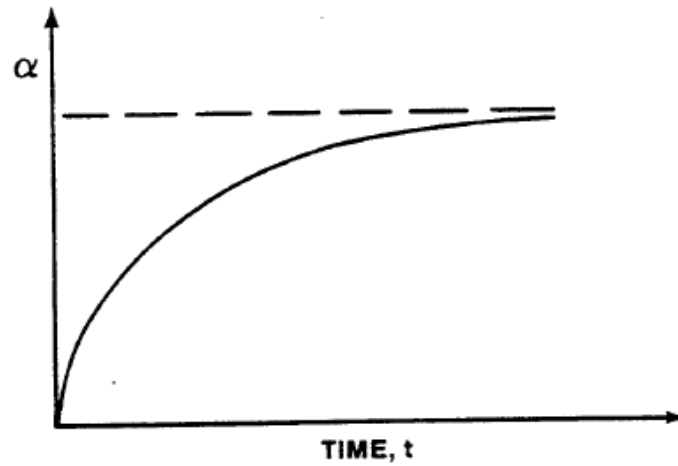
Estabilidad Estática neutral – Permanece en posición desplazada

El análisis físico de la estabilidad dinámica de un sistema se interesa con el resultado del movimiento con respecto a la evolución en el tiempo del sistema cuando es desplazado de una condición de equilibrio.

3.5.2 Movimientos Dinámicamente Estables.

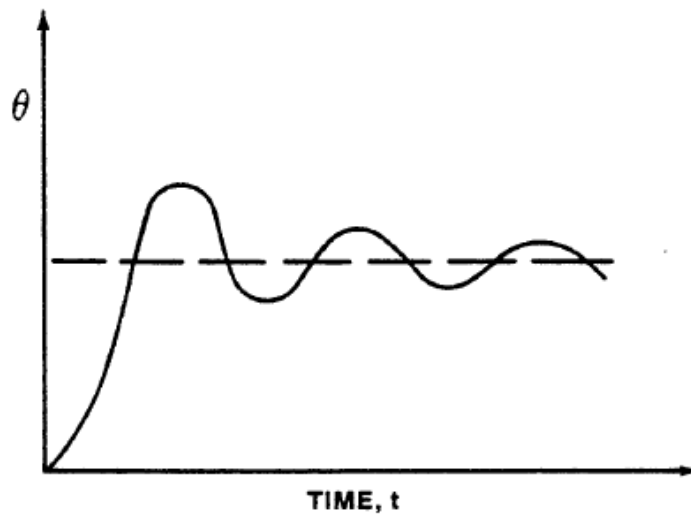
Un particular modo del movimiento de una aeronave es definido para que sea "dinámicamente estable" si los parámetros de interés tienden hacia valores finitos a medida que el tiempo se incrementa sin un límite. Algunos ejemplos de dinámicamente estable y algunos términos usados para describirlos son mostrados en las gráficas 3.12 y 3.13.⁶

Grafica 3.12 Decrecimiento exponencial.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 8, pagina 2.

Grafica 3.13 Oscilación sinusoidal convergente o amortiguada.



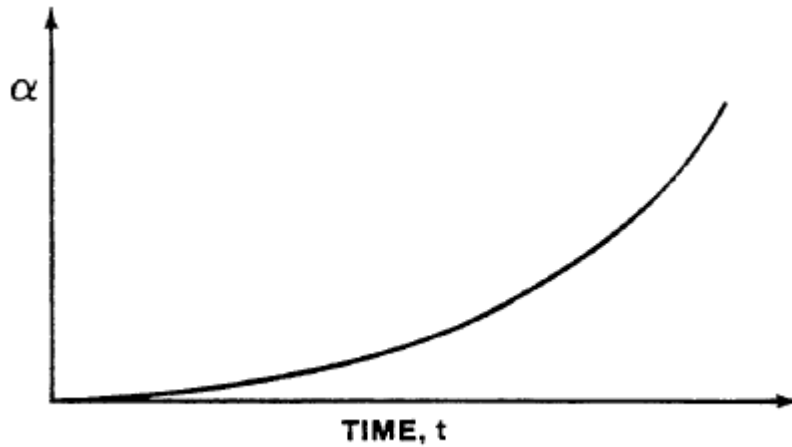
Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 8, pagina 3.

3.5.3 Movimientos Dinámicamente Inestables.

El modo de movimiento es definido para que sea "dinámicamente inestable" si el parámetro de interés aumenta sin límite a medida que el

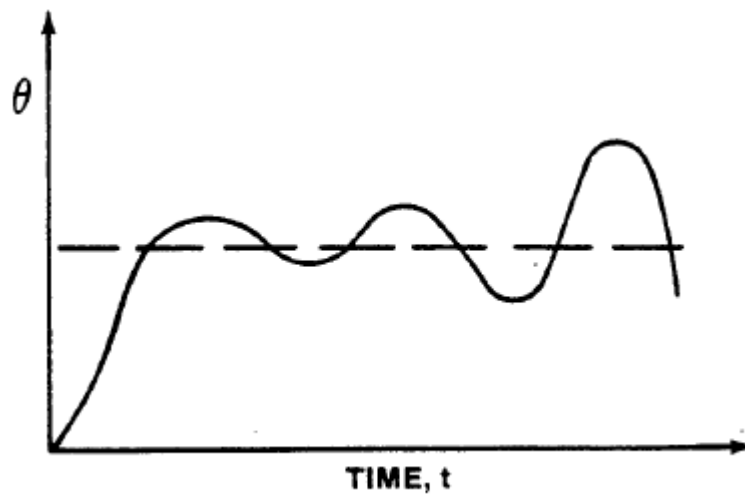
tiempo también se incrementa sin un límite. Algunos ejemplos de dinámicamente inestable son mostrados en las gráficas 3.14 y 3.15.

Grafica 3.14 Incremento exponencial.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 8, pagina 3.

Grafica 3.15 Oscilación sinusoidal divergente o no amortiguada.

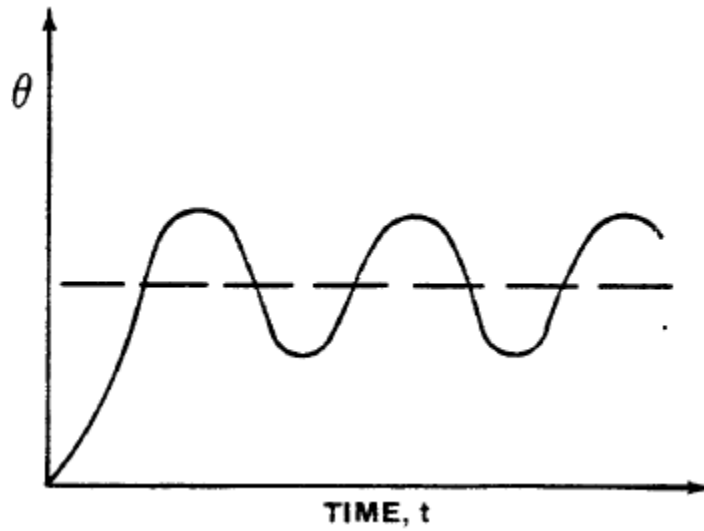


Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 8, pagina 4.

3.5.4 Movimiento Dinámicamente Neutral.

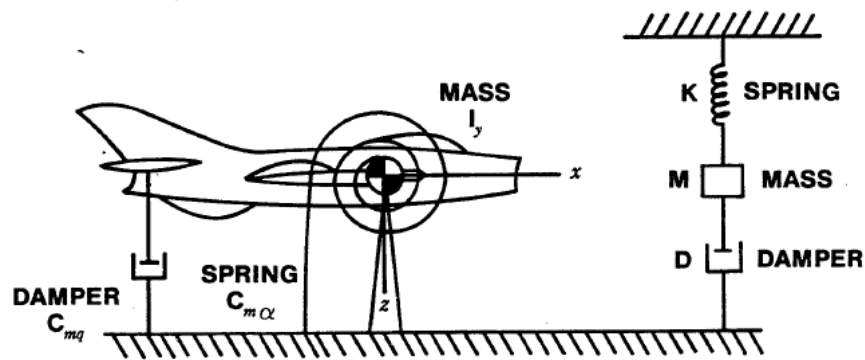
Al modo de movimiento que se dice que tiene "estabilidad dinámica neutral" si el parámetro de interés exhibe una oscilación sinusoidal no amortiguada a medida que el tiempo aumenta sin un límite. Un bosquejo de tal movimiento es mostrado en la gráfica 3.16.

Gráfica 3.16 Oscilación no amortiguada.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 8, página 4.

Figura 3.17 Analogía al sistema masa-resorte.



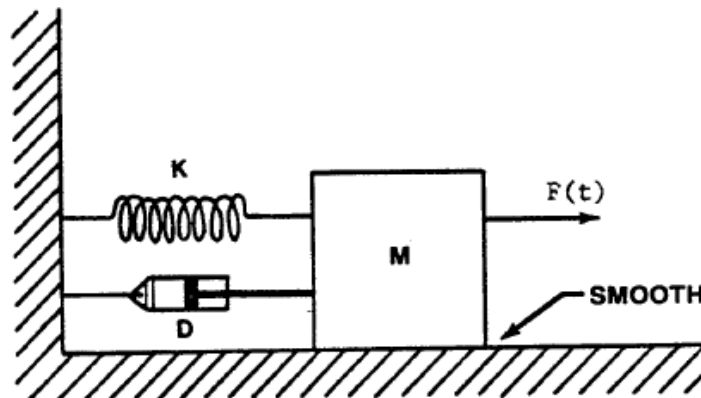
Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 3, pagina 1.

3.5.5 SISTEMAS DINAMICOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.

3.5.5.1 Sistema de segundo orden con amortiguamiento positivo.

El problema para encontrar el movimiento del bloque mostrado en la figura 3.18, abarca muchos métodos e ideas que serán usadas en la investigación del historial de tiempo del movimiento de una aeronave desde sus ecuaciones de movimiento.⁶

Figura 3.18 Sistema de segundo orden.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 8, pagina 6.

La ecuación diferencial de movimiento para este sistema físico es

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + k = F(t) \quad (3.121)$$

Luego se efectúa la transformada de Laplace, asumiendo que las condiciones iniciales son cero y resolviendo para $X(s)/F(s)$, El resultado de la función de transferencia es.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + k} \quad (3.122)$$

El denominador de la función de transferencia la cual da la respuesta libre de un sistema, se referirá como su “ecuación característica”, y el símbolo $\Delta(s)$, será usado para indicar la ecuación característica.

La ecuación característica, $\Delta(s)$, de un sistema de segundo orden será frecuentemente escrita en una notación estándar como.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.123)$$

$$\omega_n = \text{frecuencia natural}$$

$$\zeta = \text{Razon de amortiguamiento}$$

Los dos términos, frecuencia natural y razón de amortiguamiento, son frecuentemente utilizados para caracterizar el movimiento de un sistema de segundo orden.

También, conociendo la ubicación de las raíces de $\Delta(s)$ sobre el plano complejo hace posible especificar inmediatamente y bosquejar el movimiento dinámico asociado a un sistema. Continuando la discusión del problema mostrado en la figura 3.18, y haciendo una equivalencia entre el denominador de la función de transferencia y la ecuación característica.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.124)$$

$$\zeta = \frac{d}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (3.125)$$

Las raíces de $\Delta(s)$ pueden ser encontradas aplicando la formula cuadrática a la ecuación característica.

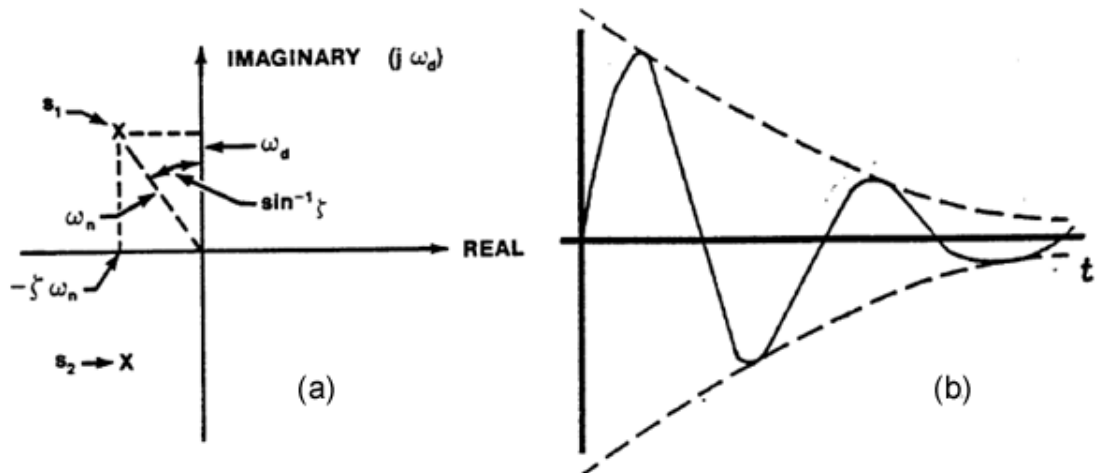
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad (3.126)$$

Donde,

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.127)$$

Note que si $(-1 < \zeta < 1)$, entonces los pares de raíces conjugadas de $\Delta(s)$ abarcan un plano complejo para que ζ sea positiva la ubicación de las raíces se deberán localizar como se muestran en la grafica 3.17a.⁶

Grafica 3.17a) Plano complejo; b) Respuesta.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capitulo 8, pagina 8.

La ecuación que describe la evolución en el tiempo del movimiento del bloque puede ser escrita conociendo las raíces de $\Delta(s)$, $s_{1,2}$, mostradas arriba.

$$X(t) = C_1 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (3.128)$$

Donde,

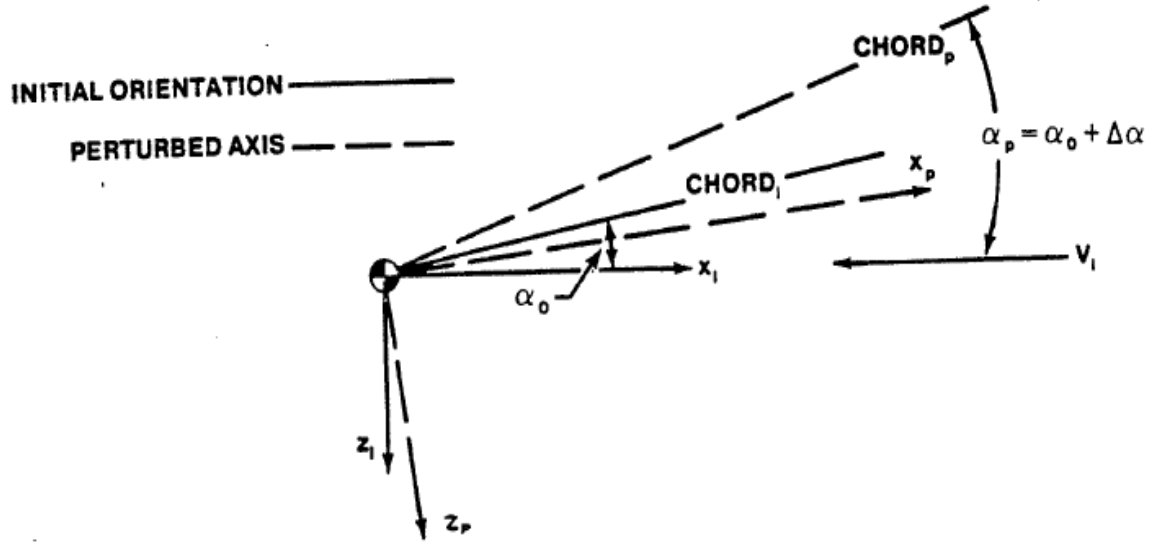
C_1 y ϕ son constantes determinadas desde las condiciones iniciales. Conociendo bien sea la ubicación de las raíces de $\Delta(s)$ mostradas en la figura 3.17a o la ecuación en $X(t)$ hace posible dibujar o describir la evolución en el tiempo del movimiento del bloque. El movimiento del bloque mostrado en la figura 3.18 como una función con respecto al tiempo es una oscilación sinusoidal con una envolvente que decrece exponencialmente y es dinámicamente estable como se muestra en la figura 3.17b.

3.5.6 Ecuaciones de Movimiento.

Seis ecuaciones de movimiento (tres de traslación y tres de rotación) para un vehículo volador de cuerpo rígido son requeridas para la solución de este problema de movimiento. Si se asume una aeronave de cuerpo rígido y masa constante entonces las ecuaciones pueden ser derivadas y expresadas en términos de un sistema de coordenadas fijo en el cuerpo. La solución para el movimiento de un cuerpo rígido en términos de sistemas de coordenadas de cuerpo fijo es particularmente conveniente en el caso de una aeronave cuando las fuerzas aplicadas son más fácilmente especificadas en el sistema de ejes de cuerpo.

"Los ejes de estabilidad" pueden ser usados como un sistema de coordenadas específico. Este sistema de coordenadas xyz es fijo en el vehículo y rota con este cuando es perturbado de la condición de referencia de equilibrio. Las líneas solidas en la figura 3.19 representan el alineamiento inicial de los ejes de estabilidad y las líneas punteadas muestran el sistema de coordenadas perturbado.⁶

Figura 3.19 Sistema de ejes de la estabilidad.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 8, página 18.

El resultado de la derivación completa de las ecuaciones de movimiento son listadas aquí:

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv)$$

$$F_y = m(\dot{v} + rU - pw)$$

$$F_z = m(\dot{w} + pv - qU)$$

$$l = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) - (\dot{r} + pq)I_{xz}$$

$$m = \dot{q}I_y - pr(I_z - I_x) + (p^2 - r^2)I_{xz}$$

$$n = \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) + (qr - \dot{p})I_z$$

Donde F_x , F_y y F_z son fuerzas en las direcciones x, y, z y l, m y n son momentos alrededor de los ejes x, y, z, tomados en el centro de gravedad del vehículo y $U = U_0 + u$.

Separación de las ecuaciones de movimiento:

Cuando todas, fuerzas latero-direccionales, momentos y aceleraciones se restringen para que sean cero, las ecuaciones las cuales gobiernan solamente el movimiento longitudinal resultan de las seis generales ecuaciones de movimiento. Es decir sustituyendo,

$$p = 0 = r$$

$$\dot{p} = 0 = \dot{r}$$

$$l = 0 = n$$

$$F_y = 0$$

$$v = 0$$

$$\dot{v} = 0$$

Dentro de las ecuaciones el resultado en las ecuaciones longitudinales de movimiento

$$F_x = m(\dot{u} + qw)$$

$$F_z = m(\dot{w} - qU)$$

$$m = \dot{q}I_y$$

Realizando una expansión de las ecuaciones con las series de Taylor como una función de u , q y w y asumiendo pequeñas perturbaciones ($U = U_0 + u$) resulta en un conjunto de ecuaciones linealizadas para el movimiento longitudinal. Note que las ecuaciones resultantes son las ecuaciones de perturbación longitudinal y que las incógnitas son los valores perturbados de α , u y θ de una condición de equilibrio. Estas ecuaciones en forma de coeficientes son:⁶

$$\left[\left(\frac{2m}{\rho S U_0} \right) \hat{u} + (2C_D + C_{D_u}) \hat{u} \right] + (C_{D_\alpha} \alpha) + (C_{L_\theta} \theta) = 0 \quad (3.129)$$

$$-(C_{L_u} + 2C_{L_0})\hat{u} - \left[\frac{c}{2U_0} C_{L_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + \left(\frac{2m}{\rho S U_0} + C_{L_{\alpha}} \right) \alpha \right] + \left(\frac{2m}{\rho S U_0} - \frac{c}{2U_0} C_{L_q} \right) \dot{\theta} = 0 \quad (3.130)$$

$$-(C_{m_u} \hat{u}) - \left(\frac{c}{2U_0} C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{m_{\alpha}} \alpha \right) + \left(\frac{2I_y}{\rho S U_0^2 c} \ddot{\theta} - \frac{c}{2U_0} C_{m_q} \dot{\theta} \right) = 0 \quad (3.131)$$

Dónde:

$\hat{u} = \frac{u}{U_0}$ (Un parámetro de velocidad adimensional ha sido definido por conveniencia)

α, θ son perturbaciones alrededor de sus valores de equilibrio

$C_{D_u}, C_{L_{\alpha}}, etc.$, Son derivadas parciales evaluadas en la condición de referencia con respecto a los coeficientes de fuerza.

Note que estas ecuaciones son únicamente movimiento longitudinal.

La solución de las ecuaciones de perturbación longitudinal puede ser obtenida utilizando la transformada de Laplace. Tomando la transformada de Laplace de la ecuación de momento de pitch e indicando que los valores de perturbación inicial son cero resulta en:

$$\left[-\frac{c}{2U_0} C_{m_{\dot{\alpha}}} s - C_{m_{\alpha}} \right] \alpha(s) + \left[\frac{2I_y}{\rho U_0^2 S c} s^2 - \frac{c}{2U_0} C_{m_q} s \right] \theta(s) = 0 \quad (3.132)$$

Las otras dos ecuaciones podrían ser similarmente transformadas por Laplace para obtener un conjunto de ecuaciones de perturbación longitudinal en el dominio s.

Tal como.

$$\left(\frac{2m}{\rho S U_0} s \right) \hat{u}(s) + (2C_D + C_{D_u}) \hat{u}(s) + C_{D_{\alpha}} \alpha(s) + C_{L_0} \theta(s) = 0 \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned}
 &-(C_{L_u} + 2C_{L_0})\hat{u}(s) - \left[\frac{c}{2U_0} C_{L_\alpha} s + \frac{2m}{\rho S U_0} + C_{L_\alpha} \right] \alpha(s) \\
 &+ \left[\left(\frac{2m}{\rho S U_0} - \frac{c}{2U_0} C_{L_q} \right) s \right] \theta(s) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

3.5.7 Movimiento Longitudinal.

Las ecuaciones describen el movimiento longitudinal de una aeronave alrededor de una condición de equilibrio. La solución teórica para el movimiento de una aeronave puede ser muy buena, dependiendo de la exactitud de varios parámetros aerodinámicos. Por ejemplo, C_{D_α} es un parámetro que aparece en la ecuación de Drag de fuerza y la bondad de la solución dependerá de con que precisión los valores de C_{D_α} se conocen. Antes de que una aeronave vuele, tales valores para varias de las derivadas de estabilidad pueden ser extraídas de datos de túnel de viento.⁶

3.5.8 Modos del Movimiento longitudinal.

La experiencia ha mostrado que la aeronave exhibe dos diferentes tipos de oscilaciones longitudinales:

1. Periodo Corto, con relativamente un amortiguamiento pesado que es llamado "periodo corto" modo (sp).
2. Periodo Largo, con un amortiguamiento muy ligero que es llamado "fugoide" modo (p).

Los periodos y amortiguaciones de estas oscilaciones varían con la configuración de la aeronave y con la condición de vuelo.

El periodo corto es caracterizado fundamentalmente por variaciones en ángulo de ataque y ángulo de pitch con un muy pequeño cambio en la velocidad delantera. Relativo al fugoide, el periodo corto tiene una alta frecuencia y una amortiguación pesada.

Los valores típicos para este periodo amortiguado están en el rango de dos a cinco segundos. Generalmente, el modo de periodo corto es el más importante en el movimiento longitudinal.

El fugoide es caracterizado principalmente por la variación en u y θ con α casi constante. Esta oscilación de periodo largo puede ser pensada como un problema de energía total constante de intercambio entre energía potencial y cinética. La nariz de la aeronave cae y la velocidad

aumenta ya que la aeronave desciende debajo de su altitud inicial. Luego la nariz gira hacia arriba, causando que la aeronave ascienda arriba de su altitud inicial con la velocidad disminuyendo hasta que la nariz caiga perezosamente debajo del horizonte de la cima de la maniobra.

Debido al ligero amortiguamiento, muchos ciclos son requeridos para que este movimiento se amortigüe. Sin embargo, este periodo largo combinado con un bajo amortiguamiento resulta en una oscilación que es fácilmente controlada por el piloto, aun por un leve movimiento divergente. Los valores típicos para este periodo de amortiguamiento están en el orden de 45 a 90 segundos.

Fugoide

- Pequeña ω_n
- Largo tiempo constante
- Pequeña razón de amortiguamiento

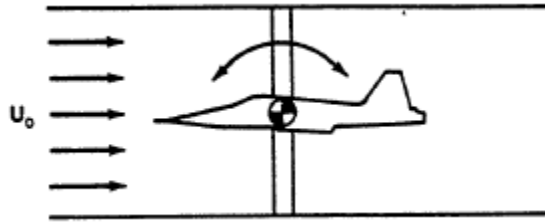
Periodo Corto

- Largo ω_n
- Pequeño tiempo constante
- Alto razón de amortiguamiento

3.5.8.1 Aproximación Modo Periodo Corto.

Para un grado de libertad en la primera aproximación, el periodo corto es principalmente un movimiento de cabeceo de la aeronave como se observa en la figura 3.20. Además, el movimiento de periodo corto ocurre prácticamente a velocidad constante, $\Delta U = 0$; y desde que no haya movimiento vertical, los cambios en el ángulo de ataque son equivalentes al cambio en el ángulo de cabeceo, $\Delta\alpha = \Delta\theta$. Con estas consideraciones aplicadas a la ecuación de momento de cabeceo (), el resultado se convierte en:

Figura 3.20 Modelo de grado de libertad.



Fuente: AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook. Capítulo 8, página 25.

$$\frac{2I_y}{\rho U_0^2 S \bar{c}} \ddot{\alpha} - \frac{\bar{c}}{2U_0} (C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}) \dot{\alpha} - C_{m_{\alpha}} \alpha = 0 \quad (3.135)$$

Donde C_{m_u} se asume que sea despreciable.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.135), resulta en una forma aproximada de la ecuación característica.

$$\Delta(s) = \frac{2I_y}{\rho U_0^2 S \bar{c}} s^2 - \frac{\bar{c}}{2U_0} (C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}) s - C_{m_{\alpha}} = 0 \quad (3.136)$$

Comparando la ecuación (3.136) con la forma estándar de la ecuación característica (3.123), resulta en una aproximación de la frecuencia natural y razón de amortiguamiento para el periodo corto.

$$\zeta_{sp} = -\frac{(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}})}{\sqrt{-C_{m_{\alpha}}}} \frac{\bar{c}}{2U_0} \sqrt{\frac{\rho U_0^2 S \bar{c}}{2I_y}} \quad (3.137)$$

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{-C_{m_{\alpha}} \frac{\rho U_0^2 S \bar{c}}{2I_y}} \quad (3.138)$$

$C_{m_{\alpha}}$ – Coeficiente de momento de cabeceo debido al cambio en el ángulo de ataque. Proporcional al desplazamiento angular desde el equilibrio (constante del resorte)⁶

C_{m_q} – Coeficiente de momento de cabeceo debido al cambio en la tasa de cabeceo. Proporcional a la tasa angular (amortiguador).

Ambas ecuaciones (3.137) y (3.138) pueden ser usadas para predecir la tendencia que se espera en la razón de amortiguamiento y frecuencia natural del periodo corto cuando las condiciones de vuelo y la configuración de la aeronave cambian. Además estas ecuaciones muestran el predominante efecto de las derivadas de estabilidad a la razón de amortiguamiento y frecuencia natural del periodo corto.

3.5.8.2 Aproximación Modo fugoide.

Un planteamiento similar al que se hizo cuando se obtuvo la aproximación de periodo corto deberá ser utilizado para obtener un conjunto de ecuaciones que se aproximen a la oscilación fugoide. Recordando que el movimiento fugoide ocurre prácticamente a ángulo de ataque constante, es lógico sustituir $\alpha = 0$ dentro de las ecuaciones de movimiento longitudinal. Esto da como resultado un conjunto de tres ecuaciones con solamente dos incógnitas. Razonado que el movimiento Phugoide es caracterizado principalmente por cambios en la actitud y la velocidad de la aeronave, implica que las ecuaciones de fuerza de sustentación y fuerza de arrastre son las dos ecuaciones la cuales deberían ser usadas. El resultado de las dos ecuaciones para la aproximación fugoide en dominio de Laplace es.⁶

$$\left[\frac{2m}{\rho S U_0} s + 2C_D \right] \hat{u}(s) + C_{L_0} \theta(s) = 0 \quad (3.139)$$

$$-2C_{L_0} \hat{u}(s) + \frac{2m}{\rho S U_0} s \theta(s) = 0 \quad (3.140)$$

Donde C_{D_u} , C_{D_α} , C_{L_u} , C_{L_α} , $C_{L_{\dot{\alpha}}}$ y C_{L_q} se han considerado despreciablemente pequeñas.

La ecuación característica para la aproximación phugoide ahora puede ser encontrada de las ecuaciones (3.139 y 3.140).

$$\left[\frac{2m}{\rho S U_0} \right]^2 s^2 + \frac{4m}{\rho S U_0} C_D s + 2C_{L_0}^2 = 0 \quad (3.141)$$

Note que la sustentación y el peso no son equivalentes durante el movimiento fugoide, pero de igual manera la diferencia entre los dos términos es muy pequeña. Si se hace la aproximación de que:

$$L = W$$

En dónde.

$$W = mg$$

Esto se puede escribir como.

$$C_L = \frac{2mg}{\rho S U_0^2} \quad (3.142)$$

Ahora la ecuación característica del modo fugoide se puede escribir como,

$$\frac{C_{L_0}^2 U_0^2}{g^2} s^2 + 2 \frac{C_{L_0} U_0}{g} C_D s + 2 C_{L_0}^2 = 0 \quad (3.143)$$

Luego dividiendo por $\frac{C_{L_0}^2 U_0^2}{g^2}$

$$s^2 + 2 \frac{g}{U_0} \frac{C_D}{C_{L_0}} s + 2 \frac{g^2}{U_0^2} = 0 \quad (3.144)$$

Comparando la ecuación (24) con la forma de la ecuación estándar, resulta en una expresión simplificada para la frecuencia natural de la aproximación fugoide y está dada por,

$$\omega_{np} = \sqrt{2} * \frac{g}{U_0} \quad (3.145)$$

Donde U_0 es la velocidad verdadera en metros por segundo.

Una expresión simplificada para la razón de amortiguamiento de la aproximación fugoide, también puede ser obtenida por,

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{C_D}{C_L} \quad (3.146)$$

Las ecuaciones (3.145) y (3.146) se pueden utilizar para entender algo mejor la contribución de la frecuencia natural y razón de amortiguamiento del movimiento fugoide.

3.5.8.3 *Calculo de las aproximaciones para los modos de periodo corto y fugoide respectivamente:*

Los datos necesarios para hallar las frecuencias naturales, factor de amortiguamiento y ecuaciones características para cada uno de los modos en lo que concierne al movimiento longitudinal, fueron contemplados en capítulos anteriores, teniendo en cuenta las condiciones de vuelo ya establecidas:

- Periodo corto:

- Frecuencia natural:

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{-C_{m_\alpha} \frac{\rho U_0^2 S \bar{c}}{2I_y}}$$

$$\omega_{n_{sp}} = 4,937002457$$

- Factor de amortiguamiento:

$$\zeta_{sp} = -\frac{(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}})}{\sqrt{-C_{m_\alpha}}} \frac{\bar{c}}{2U_0} \sqrt{\frac{\rho U_0^2 S \bar{c}}{2I_y}}$$

$$\zeta_{sp} = 0,191491194$$

- Ecuación característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.147)$$

Por lo tanto

$$\Delta(s) = (s^2) + 1,89078499(s) + 24,37399326$$

Ya determinada la ecuación característica de segundo orden, se es necesario hallar las raíces de la cuadrática para así determinar si nuestro UAS es dinámicamente estable. Si las raíces de dicho polinomio tienen su parte real negativa, se considera dinámicamente estable, como se indica en la ecuación (6):

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

Donde ω_d , es la frecuencia de amortiguamiento, entonces:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_{d_{sp}} = 4,845639926$$

Y las raíces del polinomio son:

$$s_{1,2} = -0,945392495 \pm 4,845639926i$$

Para graficar la respuesta natural del movimiento longitudinal a mando fijo haremos uso de la ecuación de amortiguamiento:

$$X(t) = C_1 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

Donde los valores de C_1 y ϕ se encuentran en la siguiente tabla:

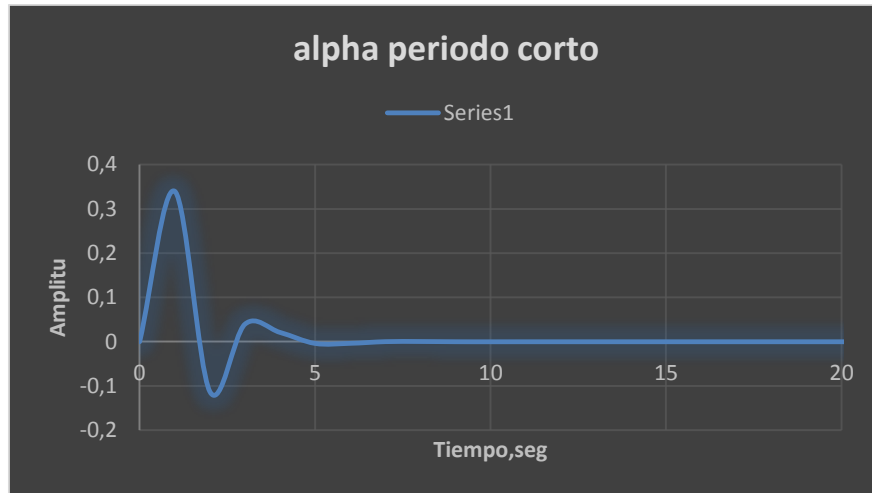
	Amplitud (C_1)	Fase (ϕ)
α	1,081	28,3 <i>grad</i> = 0,494 <i>rad</i>
q	0,017	117 <i>grad</i> = 2,042 <i>rad</i>

Tabla 3-8 Amplitudes y ángulos de fase para el modo de periodo corto.

Entonces, para graficar con respecto al ángulo de ataque α , la ecuación de amortiguamiento es la siguiente:

$$X(t) = 1,081e^{-0,945392495t} \cos(4,845639926t + 0,493891798)$$

Grafica 3.18 Respuesta periodo corto con respecto a α (α).



Fuente: Autoridad propia.

Y respecto a la razón de cabeceo q , la ecuación de amortiguamiento es presentada a continuación:

$$X(t) = 0,017e^{-0,945392495t} \cos(4,845639926t + 2,041884817)$$

Grafica 3.19 Respuesta periodo corto con respecto a la razón de cabeceo (q).



Fuente: Autoridad propia.

- Fugoide:

- Frecuencia natural:

$$\omega_{n_p} = \sqrt{2} * \frac{g}{U_0}$$

$$\omega_{n_p} = 0,816084415$$

- Factor de amortiguamiento:

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{C_D}{C_L}$$

$$\zeta_p = 0,064282435$$

- Ecuación característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.148)$$

$$\Delta(s) = (s^2) + 0,104919786(s) + 0,665993772$$

Frecuencia de amortiguamiento para el modo fugoide es:

$$\omega_{d_p} = 0,814396544$$

Las raíces del polinomio son:

$$s_{3,4} = -0,052459893 \pm 0,814396544 i$$

Para la ecuación (tal), los valores de C_1 y ϕ , se ilustran en la siguiente tabla:

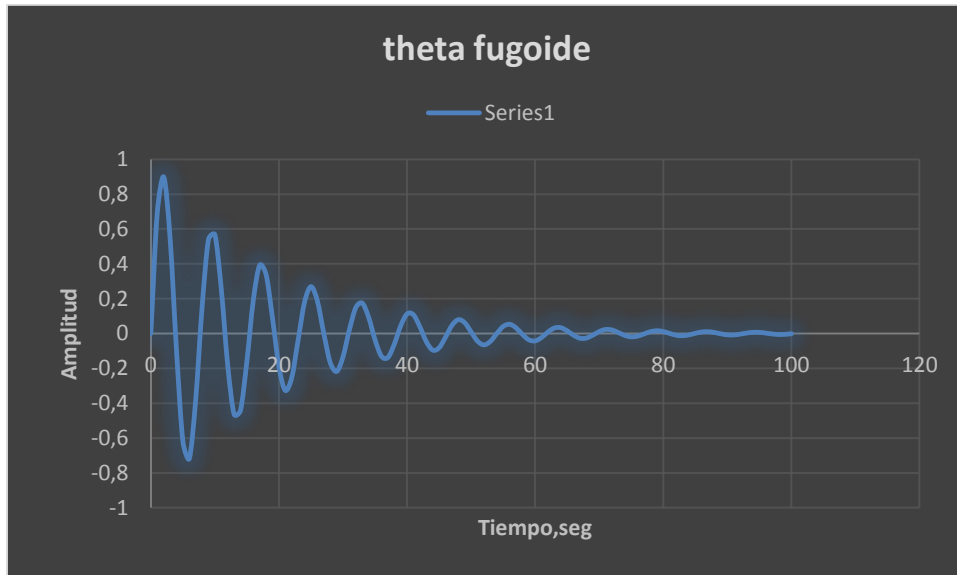
	Amplitud (C_1)	Fase (ϕ)
θ	1	0 grad = 0 rad
u	0,029	76 grad = 1,326 rad

Tabla 3-9 Amplitudes y ángulos de fase para el modo fugoide.

Ahora, la ecuación de amortiguamiento para modo fugoide con respecto al ángulo de cabeceo θ , es la siguiente:

$$X(t) = 1e^{-0,052459893t} \cos(0,814396544t)$$

Grafica 3.20 Respuesta fugoide con respecto al ángulo de cabeceo (θ)

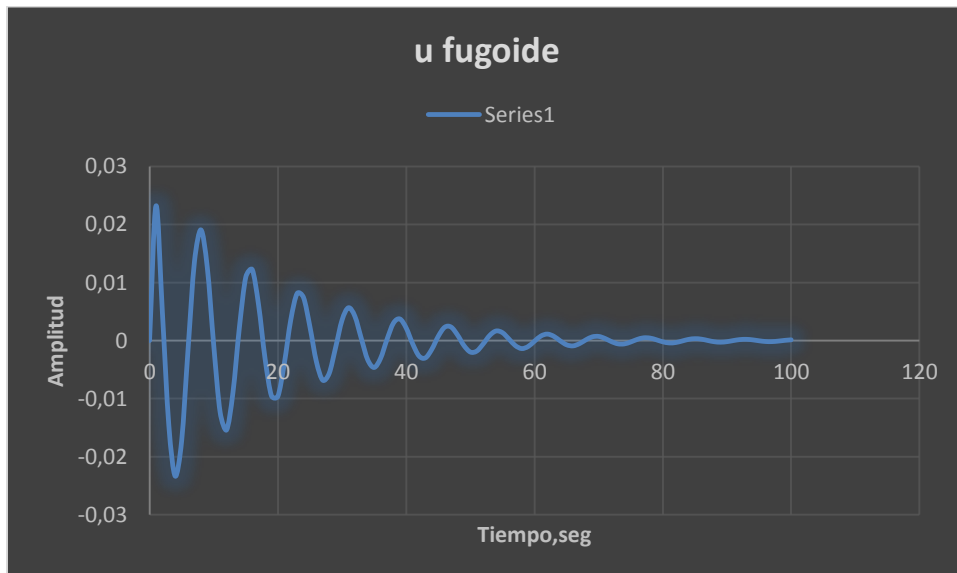


Fuente: Autoridad propia.

Y con respecto a la velocidad u , la ecuación de amortiguamiento es ilustrada a continuación:

$$X(t) = 0,029e^{-0,052459893t} \cos(0,814396544t + 1,326352531)$$

Grafica 3.21 Respuesta fugoide con respecto a la velocidad (u).



Fuente: Autoridad propia.

3.5.9 Derivadas de Estabilidad.

Algunas de las derivadas de estabilidad son particularmente pertinentes en el estudio de los modos dinámicos del movimiento de una aeronave, unos de los más importantes aparecen en función de las ecuaciones las cuales caracterizan los modos dinámicos del movimiento deberían ser entendidos. C_{M_q}, C_{M_α} .

$$C_{M_\alpha}$$

Esta derivada de estabilidad es el cambio en el coeficiente de momento de cabeceo con la variación del ángulo de ataque y se refiere comúnmente como una derivada de estabilidad estática longitudinal. Cuando el ángulo de ataque de la estructura del avión incrementa desde una condición de equilibrio, el aumento de sustentación sobre el estabilizador horizontal causa un momento de pitch negativo alrededor del centro de gravedad de la estructura del avión. Simultáneamente, el aumento de sustentación sobre el ala causa un momento de pitch negativo o positivo, dependiendo de la fuerza y la localización del vector de sustentación con respecto al centro de gravedad. Estas contribuciones junto con la contribución del momento de pitch del fuselaje son combinadas para establecer la derivada C_{M_α} . La magnitud y el signo del total C_{M_α} para una configuración particular de la estructura de la aeronave, son por lo tanto una función de la posición del centro de gravedad y este factor es muy importante en la estabilidad longitudinal y control. Si el centro de gravedad esta adelante del punto neutral, el valor de C_{M_α} es negativo y la estructura de la aeronave se dice que posee estabilidad estática longitudinal.⁶

De otro modo, si el centro de gravedad esta por detrás del punto neutral el valor de C_{M_α} es positivo y la estructura de la aeronave entonces es estáticamente inestable.

C_{M_α} Es tal vez la derivada más importante en lo que tiene que ver con estabilidad longitudinal y control. Principalmente establece la frecuencia natural del modo periodo corto y es un factor importante en determinar la respuesta de la estructura de la aeronave debido a los movimientos del elevador y a ráfagas. En general un gran valor negativo de C_{M_α} (gran estabilidad estática) se desea para buenas cualidades de vuelo.

Sin embargo, si este es muy grande, la efectividad del elevador para satisfacer el control podría llegar a ser excesivamente alto. Un compromiso es entonces necesario en seleccionar un rango de diseño para C_{M_α} pero antes en términos de la derivada $C_{M_{C_L}}$, donde la relación es $C_{M_\alpha} = C_{M_{C_L}} C_{L_\alpha}$. Pero debería ser señalado que $C_{M_{C_L}}$ en la expresión de arriba es actualmente una derivada parcial, para la cual la velocidad hacia adelante permanece constante.

$$C_{M_q}$$

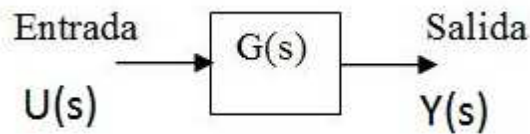
La derivada de estabilidad C_{M_q} es el cambio en el coeficiente de momento de pitch con la variación de la velocidad de pitch y comúnmente hace referencia a la derivada de amortiguamiento de pitch. Como la estructura de la aeronave cabecea alrededor de su centro de gravedad, el ángulo de ataque del estabilizador horizontal cambia el desarrollo de la sustentación sobre el estabilizador horizontal, produciendo un momento de pitch negativo sobre la estructura de la aeronave y por consiguiente una contribución a la derivada C_{M_q} . Hay también una contribución a C_{M_q} debido a varios "peso muerto" efectos de aeroelasticidad. Desde que la estructura de la aeronave se esté moviendo en una trayectoria de vuelo curvada debido a este cabeceo, una fuerza centrífuga se desarrolla sobre todos los componentes de la estructura de la aeronave. La fuerza puede causar el twist a las alas como resultado al momento del peso muerto de los nacelles sobresalientes y puede causar que el ángulo de ataque del estabilizador horizontal cambie como un resultado de la flexión del fuselaje debido al peso de la sección de la cola. En vuelos a baja velocidad, C_{M_q} proviene en su mayoría de los efectos de una trayectoria de vuelo curvada sobre la cola horizontal, este signo es negativo. En vuelos de alta velocidad el signo de C_{M_q} puede ser negativo o positivo, dependiendo de la naturaleza de los efectos de aeroelasticidad. La derivada C_{M_q} es muy importante en dinámica longitudinal debido a que esta contribuye a la mayor porción del amortiguamiento del modo periodo corto para aeronaves convencionales. Como se ha señalado, este efecto de amortiguamiento proviene en su mayoría de la cola horizontal. Para aeronaves sin cola, la magnitud de C_{M_q} es consecuentemente pequeña; esta es la principal razón para el usualmente pobre amortiguamiento de este tipo de configuración. C_{M_q} También se involucra en cierto rango al

amortiguamiento fugoide. En casi todos los casos, los altos valores negativos de C_{M_q} son deseados.

3.6 Funciones de Transferencia Y Polos del sistema.

Cualquier sistema se puede representar por una función de transferencia. Esta es una función que representa y modela la respuesta del sistema en función de la entrada.

Figura 3.21 Funcion de transferencia.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink". Pagina 27.

En la figura (tal), se ve el esquema típico de una función de transferencia $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ Para simplificar se hablara de una función de transferencia de una entrada y una salida.

Se puede ver que esta todo en función de la variable 's', con lo que se está hablando de una función de trasferencia en dominio de transformada de Laplace.²³

La función $G(s)$ no es más que una división entre polinomios, de modo que tiene la forma simplificada:

$$G(s) = \frac{n(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_i)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_j)} \quad (3.149)$$

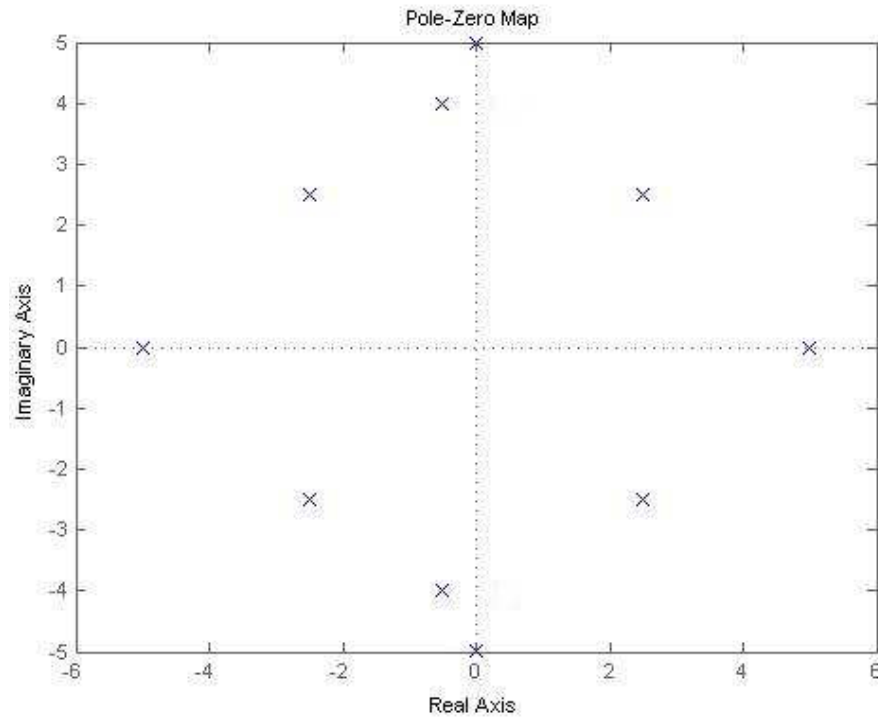
²³ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink". 2011. Tesis Doctoral.

Donde:

- n es la ganancia del sistema.
- z_i son los ceros del sistema.
- p_j son los polos del sistema.

Estos polos son números complejos que definen el comportamiento y estabilidad del sistema. Dado que son valores complejos se pueden visualizar gráficamente en un plano de dos dimensiones.

Grafica 3.22 Diagrama de Polos.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink". Pagina 28.

Se va a analizar esta gráfica. El eje horizontal es el eje real y el vertical el imaginario. Los polos que comparten la misma parte real y el mismo valor absoluto de componente son polos asociados, que se les llamara pares de polos a partir de ahora.

Se nombran polos o pares, de derecha a izquierda del $P1$ al $P6$. Así se analizará la estabilidad de cada uno de forma independiente y con un sistema con un único polo, o par de polos.

Para ver si es estable o inestable se hace una pequeña función de transferencia con Matlab y se pueden usar tanto la función STEP como la función IMPULSE.

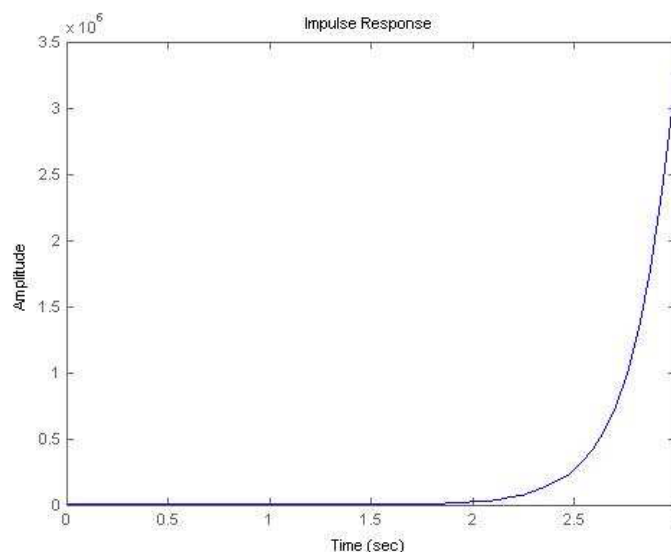
Usando la función STEP, la entrada del sistema $U(s)$ es un escalón, es decir $U(s) = \frac{1}{s}$.

En cambio sí se usa la función IMPULSE la entrada del sistema es un impulso puntual, es decir $U(s) = 1$.¹²

El comportamiento será el mismo, pero al usar un impulso lo que se ve es la repuesta del sistema a una pequeña perturbación. En cambio, al usar como entrada un escalón lo que se ve es como responde el sistema con una perturbación constante, moviendo el sistema de su posición de equilibrio a un nuevo equilibrio.

Para ver la respuesta de los polos se usara una entrada tipo impulso.

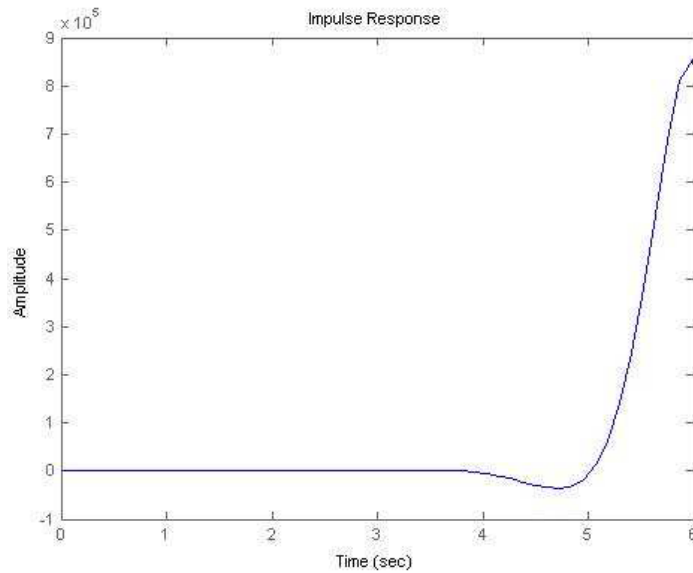
Grafica 3.23 Polo 1.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink". Pagina 29.

Se puede ver que el polo 1 es completamente inestable.

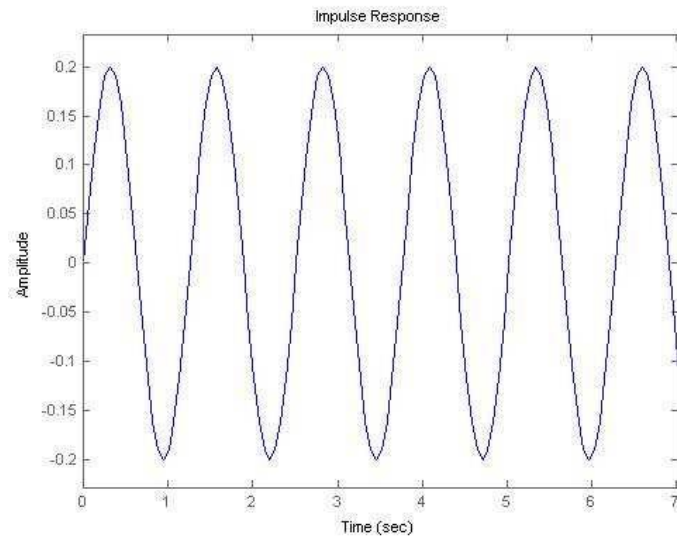
Grafica 3.24 Pareja de Polos 2.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Pagina30.

La respuesta temporal de la pareja de polos 2 es también inestable y tiende a infinito, aunque un poco más lenta que la anterior.

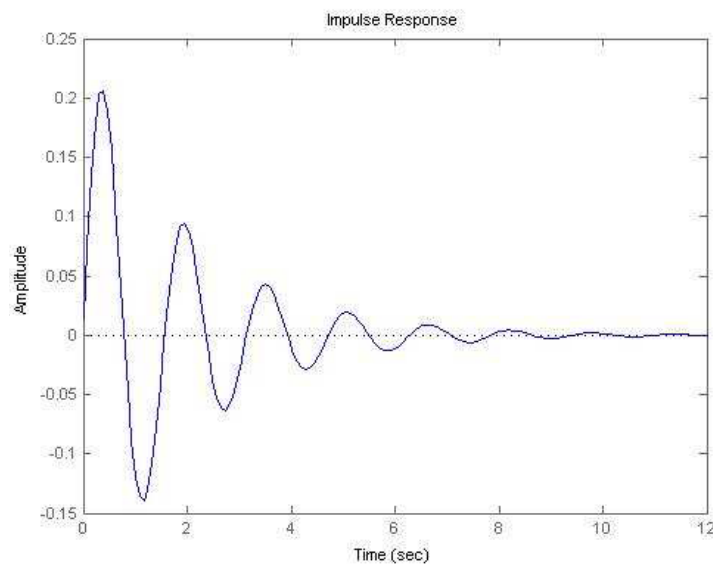
Grafica 3.25 Pareja de Polos 3.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Página 30.

La respuesta temporal de la pareja de polos 3 es un ejemplo claro de estabilidad dinámica neutra.

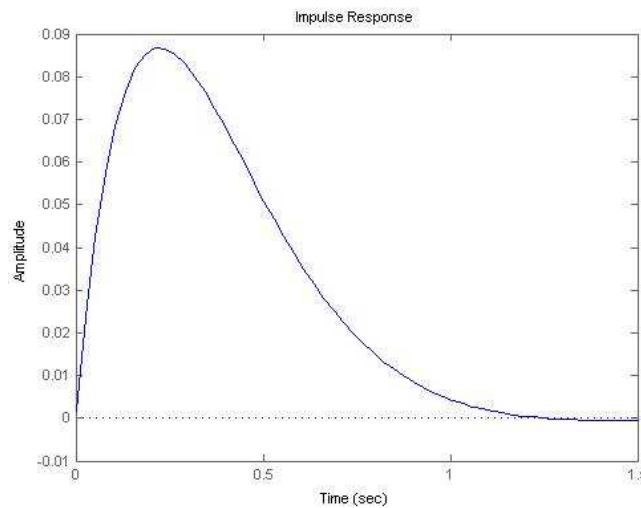
Grafica 3.26 Pareja de Polos 4.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Página 31.

Se puede ver que la respuesta temporal de esta pareja de polos sí que es estable, oscila, pero va disminuyendo su amplitud hasta estabilizarse en el valor de equilibrio inicial.

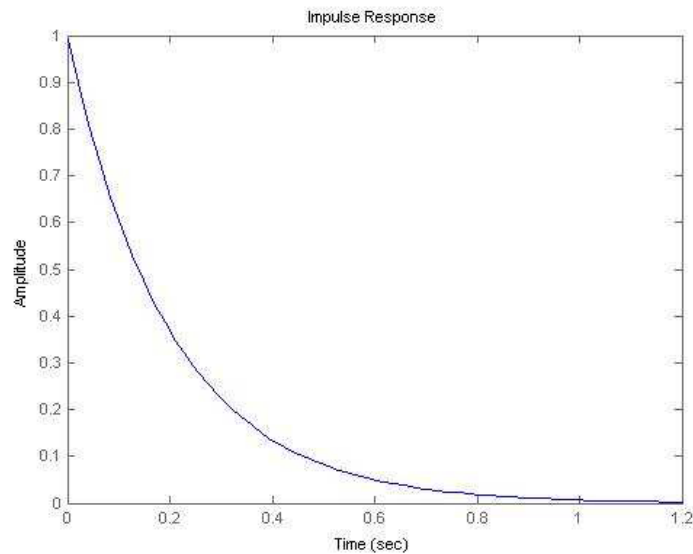
Grafica 3.27 Pareja de Polos 5.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Pagina 31.

La respuesta temporal de esta pareja de polos es aún más estable que la anterior, también oscila, pero no llega a hacer un periodo entero.

Grafica 3.28 Polo 6.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Página 32.

Por último, el polo que está más a la izquierda. La respuesta temporal no oscila y es muy estable y muy rápida.

Solo viendo el comportamiento de cada sistema por separado se ve que los polos están directamente ligados a la estabilidad del sistema. Lo primero que se observa es que los polos con parte real positiva son inestables. Lo segundo es que los polos que tienen componente imaginaria oscilan. Si observamos las parejas 4 y 5 también se ve que cuanto mayor sea el componente imaginario mayor es la oscilación. Y finalmente se ve que cuan más cerca están los polos del origen más lenta es la respuesta temporal.

Para ver con exactitud el comportamiento temporal que producen estos polos se mirara que respuesta temporal inducen. Es decir, la transformada inversa de Laplace para polos simples y para polos complejos.

La transformada inversa de Laplace de un polo simple tiene forma exponencial tal que $y(t) = ae^{at}$. La transformada inversa de Laplace de un par de polos complejos tiene forma senoidal amortiguada $y(t) = ae^{at} \sin(bt)$. En estos casos a es la parte real del polo y b la parte

compleja. Al ser exponenciales se ve directamente que si el valor del polo es positivo la respuesta tiende a infinito, con lo que es inestable.¹²

3.6.1 Amortiguamiento.

Se define la forma de los polos complejos, para obtener un polinomio de segundo orden:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2} \quad (3.150)$$

Donde k es una ganancia estándar.

Hay dos variables a definir, la frecuencia natural del sistema (ω_n) y el factor de amortiguamiento (ζ).

Se hace el proceso inverso y se saca el valor de los polos de este polinomio, es decir a y b antes mencionadas:

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.151)$$

La respuesta y comportamiento del sistema depende directamente del factor de amortiguamiento. Se va a analizar cada caso en función del valor de ζ :

- Caso 1: $\zeta > 1$

Cuando el factor de amortiguamiento es mayor que la unidad, el valor dentro de la raíz es positivo, con lo no hay componente imaginaria en los polos. Se obtienen dos polos reales, que como se ha visto antes su comportamiento es el de una exponencial.

Al movimiento que describe la respuesta del sistema se le llama movimiento sobreamortiguado.¹²

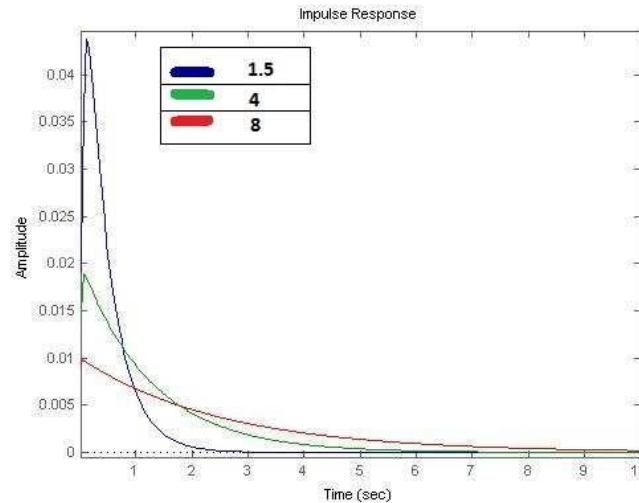
Si se coge el sistema y se introduce un impulso como entrada:

$$\begin{aligned} Y(s) &= 1 * G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2} = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= k \left(\frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \right) \end{aligned} \quad (3.152)$$

Siendo A y B el numerador resultante de simplificar en fracciones simples. Si ahora se hace la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta temporal:

$$Y(t) = k(Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}) \quad (3.153)$$

Grafica 3.29 Movimiento sobreamortiguado con factores de amortiguamiento 1.5, 4 y 8.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Pagina 34.

Se ve en la figura el comportamiento del sistema ante una pequeña perturbación. Esta grafica se ha hecho con los valores de $k = 1$, $(\omega_n = 2\pi/s)$ y $\zeta = 1.5, 4$ y 8 .

Se ve que a medida que aumenta el valor de ζ que tarda en estabilizarse aumenta. Esto es así porque uno de los polos se va acercando cada vez más a cero. Aunque el principio de la respuesta es muy rápido.¹²

- Caso 2: $\zeta = 1$

Cuando el factor de amortiguamiento es igual a la unidad, la raíz en los polos se anula, con lo que se tiene un polo de multiplicidad doble, de valor de $p_1 = p_2 = -\omega_n$.

Al movimiento que describe la respuesta del sistema se le llama amortiguamiento crítico.

Como antes, se introduce un impulso como entrada y se analiza la respuesta:

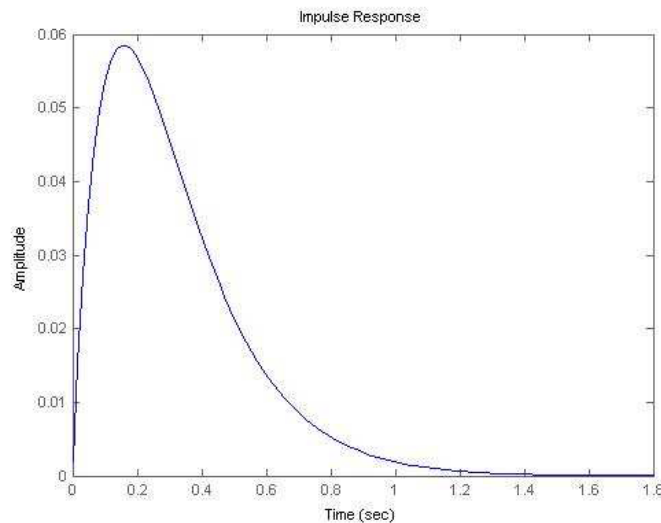
$$Y(s) = 1 * G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{(s + \omega_n)^2} \quad (3.154)$$

$$= k \left(\frac{A}{(s + \omega_n)^2} + \frac{B}{(s + \omega_n)} \right)$$

Al hacer la transformada inversa de Laplace para pasar la respuesta al dominio temporal:

$$Y(t) = k(At + B)e^{p_2 t} \quad (3.155)$$

Grafica 3.30 Movimiento crítico.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Página 35.

Se han usado los mismos valores de ganancia y frecuencia que antes, para poder comparar gráficas.

La respuesta se estabiliza más rápido que las anteriores, es debido a que en los casos anteriores había un polo más cerca del origen.

- Caso 3: $\zeta = 0$

Cuando el factor de amortiguamiento es cero la parte real del polo es también cero. Con lo que hay un movimiento oscilatorio no amortiguado.

Al movimiento que produce la respuesta del sistema se le llama movimiento no amortiguado.

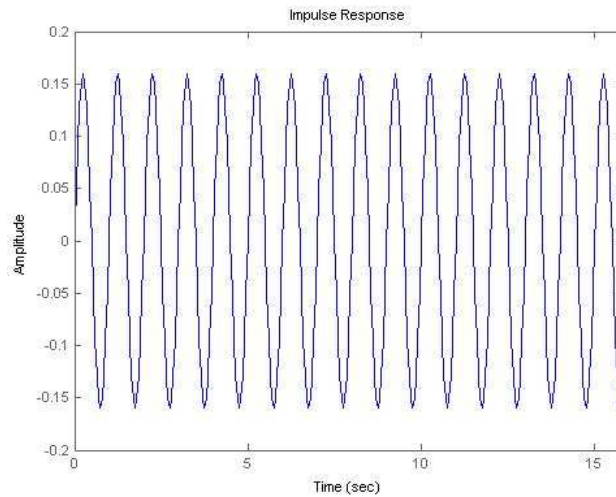
Se introduce un impulso como entrada y se analiza la respuesta:

$$Y(s) = 1 * G(s) = \frac{k}{s^2 + \omega_n^2} \quad (3.156)$$

La transformada inversa de Laplace es directa:

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (3.157)$$

Grafica 3.31 Movimiento no amortiguado.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Página 36.

En este caso la respuesta del sistema es un seno, podría haber sido también un coseno, dependiendo del numerador de la función de transferencia. No es un movimiento amortiguado y la frecuencia de oscilación es la natural ($\omega_n = 2\pi/s$) que se ha usado en todas las gráficas.¹²

Estos polos tienen una estabilidad indiferente, con lo que no es bueno tener polos en una posición tan crítica.

- Caso 4: $0 < \zeta < 1$

Cuando el factor de amortiguamiento es menor que la unidad el resultado de la raíz en los polos es negativo, por lo que los polos toman valores complejos. En este caso es cuando se produce un movimiento oscilatorio amortiguado.

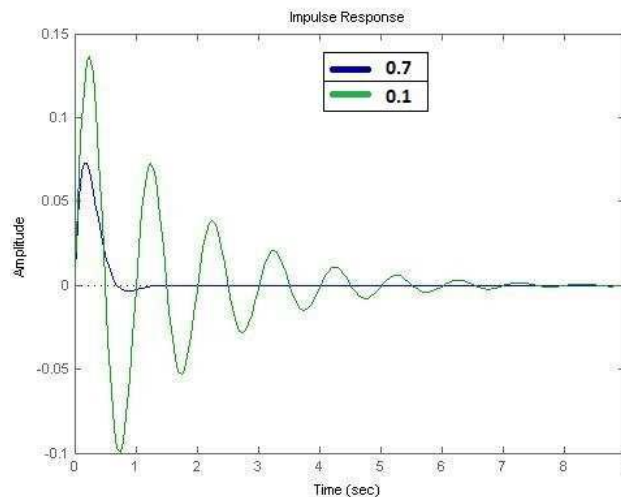
Al movimiento que produce la respuesta del sistema se le llama movimiento subamortiguado.

$$Y(s) = 1 * G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(\zeta^2 - 1)} \quad (3.158)$$

Al hacer la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \quad (3.159)$$

Grafica 3.32 Movimiento subamortiguado para una entrada impulso.



Fuente: ROVIRA, Oscar Vila. "Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink".
Pagina 37.

Esta es una gráfica de la respuesta del sistema a impulso con factores de amortiguamiento 0.7 y 0.1 respectivamente. Se ve en la figura que el factor de amortiguamiento influye mucho en el tipo de respuesta del sistema. A mayor factor de amortiguamiento más rápida es la respuesta, es decir, regresa antes a la situación de equilibrio. A menor factor de

amortiguamiento mayor es la oscilación y la frecuencia es un poco mayor también.

Se ve que la frecuencia del sistema no es la natural de la que hemos hablado a lo largo del capítulo, sino que esta modificada por el factor de amortiguamiento de forma: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Se define la constante de tiempo de cada polo como: $\tau = \frac{1}{\zeta \omega_n}$

3.6.2 Desarrollo de las Funciones de transferencia.

Una vez definido la importancia que tienen las funciones de transferencia en cuanto a estabilidad dinámica se refiere, es momento de entrar a desarrollar las funciones de transferencia para nuestra aeronave, teniendo en cuenta las mismas consideraciones realizadas anteriormente.

Primero que todo se sabe que el comportamiento de una aeronave ante una perturbación se asimila al comportamiento de un sistema masa, resorte y amortiguador por lo tanto se puede deducir que su función de transferencia tendría la misma forma:

De las ecuaciones (3.122) y (3.150) respectivamente.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + k} \equiv G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se conoce que para ambos casos el numerador es la ganancia del sistema y el denominador es la ecuación característica, nombrada en capítulos anteriores, la cual describe el comportamiento de dicho sistema.

Los valores de ω_n y ζ del denominador da la ecuación (3.150) ya se han determinado para los modos de movimiento de la aeronave tanto para periodo corto como para fugoide, tan solo resta determinar su respuesta mediante el uso de la función de transferencia para cada uno de los modos.

- Función de transferencia para el modo periodo corto.

Los valores par dicha función de transferencia son:

$$\omega_{n_{sp}} = 4,937002457$$

$$\zeta_{sp} = 0,147756821$$

$$k = 1$$

Ahora reemplazando en la ecuación (3.150) se obtiene:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2) + 1,45895158(s) + 24,37399326}$$

Luego utilizando la función de RESIDUE en Matlab, para determinar sus ceros y polos da como resultado.

$$p_{1,2} = -0,7295 \pm 4,8828i$$

Note que los polos determinados son las mismas raíces determinadas en las aproximaciones de los respectivos modos.

Analizando dichos polos se puede deducir que la parte real siendo negativa el sistema tiende a ser estable y de igual manera teniendo un valor en la parte imaginaria de los polos se sabe que es un sistema oscilatorio y conociendo el valor de ζ_{sp} se sabe que tanta amortiguación posee el sistema y así mismo que tan rápido se estabiliza.

Aplicando las condiciones del caso 4 de amortiguamiento, conociendo el valor de ζ_{sp} y dando un impulso a la entrada para conocer su respuesta la ecuación que rige su respuesta es:

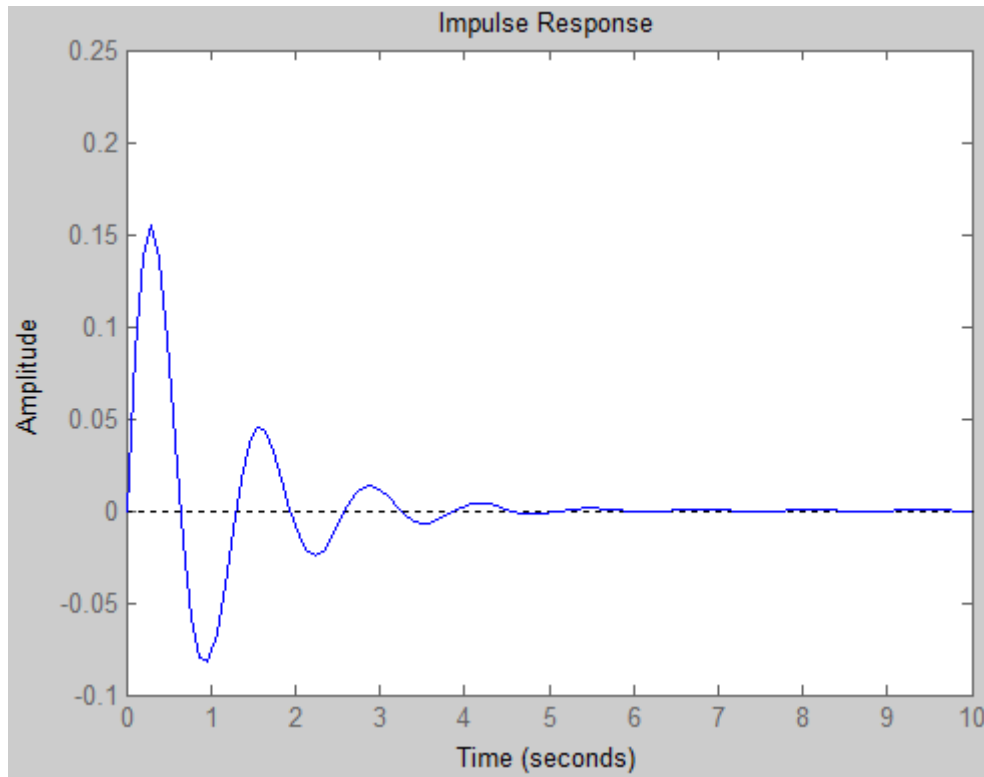
$$\begin{aligned} Y(s) = 1 * G(s) &= \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2} \\ &= \frac{k}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(\zeta^2 - 1)} \end{aligned} \quad (3.160)$$

Luego su transformada inversa es:

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \quad (3.161)$$

Ahora es posible graficar su respuesta con ayuda de Matlab para poder utilizar la función IMPULSE en toda su dimensión.

Grafica 3.33 Modo periodo corto.



Fuente: Autoridad propia.

- Función de transferencia para el modo Fugoide.

Los valores del modo fugoide para su función de transferencia son.

$$\omega_{n_p} = 0,816084415$$

$$\zeta_p = 0,064282435$$

$$k = 1$$

De igual manera, se reemplaza en la ecuación (3.150) como se realizó en Periodo Corto.

$$G(s) = \frac{1}{(s^2) + 0,104919786(s) + 0,665993772}$$

Ahora los polos serán;

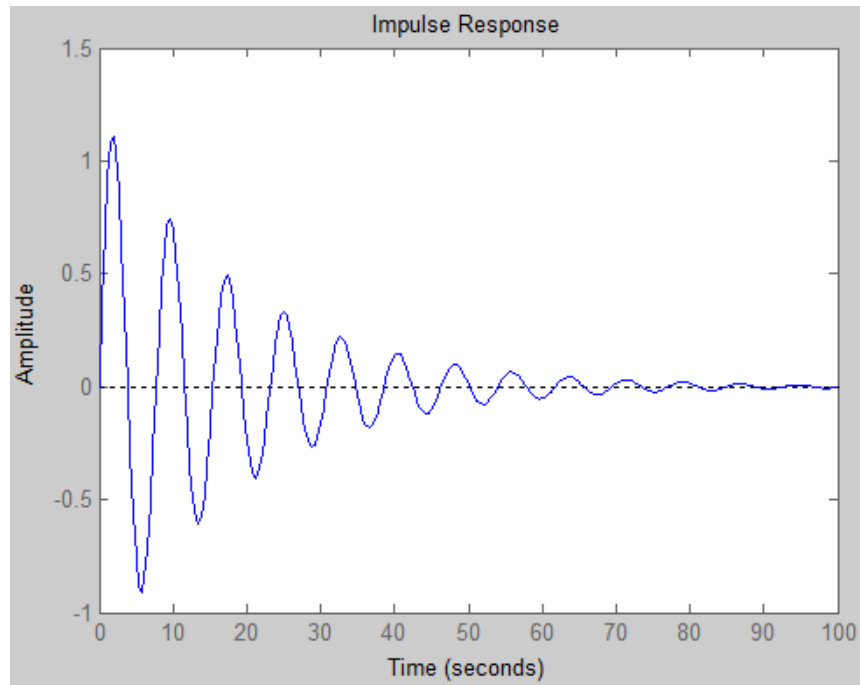
$$p_{3,4} = -0,052459893 \pm 0,814396544 i$$

De la misma forma, se aplican las condiciones que nos mostró el caso 4 de amortiguamiento. Por lo tanto la ecuación que da la respuesta de la función de transferencia para el modo fugoide es.

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \quad (3.162)$$

Luego realizando su respectiva grafica de respuesta.

Grafica 3.34 Modo fugoide.



Fuente: Autoridad propia.

4 Análisis de respuesta

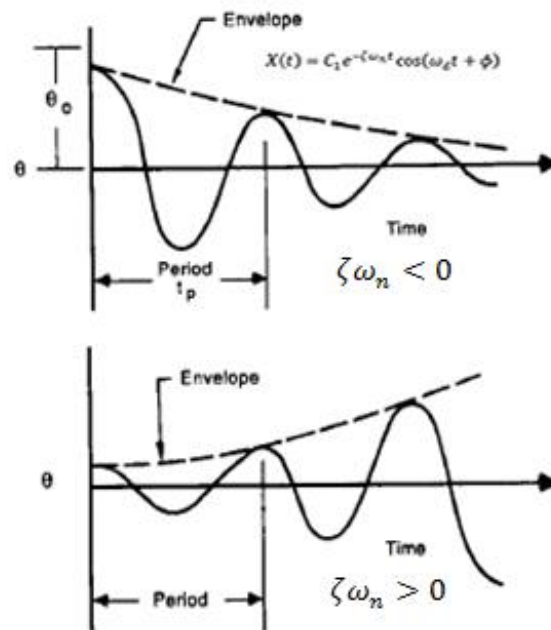
Las raíces de la ecuación característica nos describe el tipo de respuesta de nuestra aeronave. Si las raíces son reales, la respuesta será divergente, dependiendo ya sea si la raíz es positiva o negativa. Si las raíces son complejas, el movimiento será una oscilación amortiguada o des amortiguada. El periodo de la oscilación se relaciona a la parte imaginaria de la raíz como sigue:

$$Periodo = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (4.1)$$

La razón de crecimiento o decaída de la oscilación se determina por la señal de la parte real de las raíces complejas. Una parte real negativa producirá una oscilación convergente, mientras que una parte real positiva causa un movimiento divergente. Una medida de la razón de crecimiento o decrecimiento de la oscilación se pueda obtener de reducir a la mitad o doblar la amplitud inicial de la perturbación. La figura (4.1) muestra una oscilación amortiguada y des amortiguada y como el tiempo para reducir o doblar la amplitud puede ser calculada como.⁹

$$t_d \text{ o } t_r = \frac{0,693}{|\zeta\omega_n|} \quad (4.2)$$

Grafica 4.1 Relación tiempo a media o doble amplitud con respecto al periodo.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 124.

El número de ciclos para la reducción o duplicación de la amplitud es:⁹

$$N(ciclos)_{dor} = 0,110 \frac{|\omega_d|}{|\zeta \omega_n|}$$

Análisis de respuesta para el modo periodo cortó

Los datos necesarios para el análisis de respuesta ya fueron determinados con anterioridad, tan solo es tomar las ecuaciones de arriba y reemplazar los valores indicados.

$$\omega_{n_{sp}} = 4,937002457$$

$$\zeta_{sp} = 0,147756821$$

$$\omega_{d_{sp}} = 4,882812543$$

Periodo.

$$Periodo = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$Periodo = 1,28679634 \text{ sg}$$

Tiempo reducido a la mitad o doble.

$$t_d \text{ o } t_r = \frac{0,693}{|\zeta \omega_n|}$$

$$t_d \text{ o } t_r = 0,94999726$$

Numero de Ciclos a media amplitud

$$N(ciclos)_{dor} = 0,110 \frac{|\omega_d|}{|\zeta \omega_n|}$$

$$N(ciclos)_{dor} = 0,736295006 \text{ ciclos}$$

Análisis de respuesta para el modo Fugoide.

De igual manera como se mencionó en el modo periodo cortó los valores de frecuencia natural, frecuencia de amortiguamiento y factor de amortiguamiento ω_n, ω_d y ζ respectivamente se determinaron anteriormente, ya solo resta reemplazar en las (tales), para poder analizar su respuesta.

$$\omega_{n_p} = 0,816084415$$

$$\zeta_p = 0,064282435$$

$$\omega_{d_p} = 0,814396544$$

Periodo.

$$Periodo = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$Periodo = 7,7151424 \text{ sg}$$

Tiempo reducido a la mitad o doble.

$$t_d \text{ o } t_r = \frac{0,693}{|\zeta\omega_n|}$$

$$t_d \text{ o } t_r = 13,21009166$$

Numero de Ciclos a media amplitud

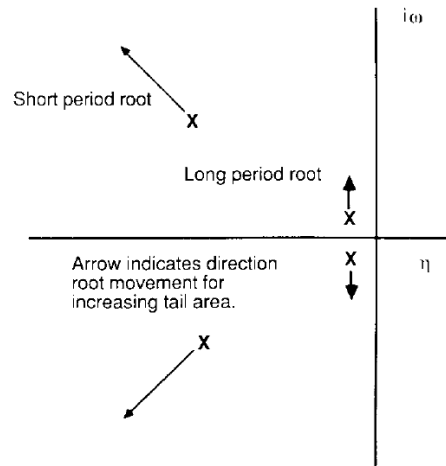
$$N(ciclos)_{dor} = 0,110 \frac{|\omega_d|}{|\zeta\omega_n|}$$

$$N(ciclos)_{dor} = 1,707659206$$

4.1 Calidad de vuelo.

En el desarrollo de este proyecto nosotros examinamos las características del movimiento longitudinal a mando fijo para una aeronave tipo canard. El factor de amortiguamiento y la frecuencia natural para ambos modos, periodo corto y fugoide, se determinaron en términos de derivadas de estabilidad aerodinámica.

Grafica 4.2 Influencia del área del estabilizador sobre el plano longitudinal.



Fuente: NELSON, R. C. Flight Stability and Automatic Control. Página 139.

Las derivadas de estabilidad son variables que están en función de la geometría y las características aerodinámicas de la aeronave. Por ejemplo, incrementando el tamaño del estabilizador incrementaríamos la estabilidad estática y el factor de amortiguamiento para el modo de periodo corto, sin embargo con ese incremento, de igual manera aumentarían el peso y las fuerzas aerodinámicas de arrastre de la aeronave y de ese modo se disminuye el rendimiento de la aeronave. Para acordar un adecuado tamaño y rendimiento en una aeronave, al diseñarse, se necesitan conocer que grados de estabilidad y control es requerido por el piloto y así considerar una aeronave segura en vuelo.

Las calidades de vuelo de una aeronave se relacionan con las características de estabilidad y control y son estas características las que dan una impresión de vuelo al piloto, quien aportara una opinión si la aeronave es de un fácil o difícil control en un vuelo equilibrado y en la maniobrabilidad de vuelo.

La calidad de vuelo es evaluada por el piloto en la fase de vuelo teniendo en cuenta el tipo de aeronave. La clasificación de la aeronave se hace acorde al tamaño y la maniobrabilidad de la misma mostrada en la tabla 4-3. La fase de vuelo se encuentra dividida en tres categorías expuestas en la tabla 4-2. La categoría A son para aeronaves militares y las categorías B y C son aplicables para aeronaves comerciales y también

para militares. La calidad de vuelo son especificados en término de tres niveles en la tabla 4-1:

Nivel de la calidad de vuelo	
Nivel 1	La calidad de vuelo es claramente adecuada para la misión de fase de vuelo.
Nivel 2	La calidad de vuelo es adecuada para llevar a cabo la misión de fase de vuelo, pero se esperaría en ocasiones que el piloto se esfuerce al maniobrar o una atenuación en la efectividad de la misión, o ambas.
Nivel 3	La calidad de vuelo es tal que la aeronave puede ser controlada sin peligro, pero el piloto tendrá un esfuerzo excesivo o la efectividad de la misión es inadecuada, o ambas. La fase de vuelo para la categoría A puede ser terminada sin ningún peligro, y la categoría B y C pueden ser completadas.

Tabla 4-1 Niveles de la calidad de vuelo.

Estos niveles fueron determinados en base a la opinión de los pilotos o en las características de vuelo de la aeronave.

En la tabla 4-4 se encuentra una recopilación de las especificaciones del movimiento longitudinal en los modos de periodo corto y fugoide, la cual es válida para cualquier tipo de aeronave.

La información dada en la tabla 4-4 son valores proporcionados en el diseño. Como se mostró con anterioridad, las características de respuesta para el movimiento longitudinal de una aeronave están relacionadas con las derivadas de estabilidad y por ello inherente a la geometría de la misma, por lo cual, la calidad de vuelo es un factor a tener en cuenta en la fase de diseño preliminar.

Categorías de fase de vuelo

Fases de vuelo no terminal:

Categoría A	Fases de vuelo no terminal que requiere de maniobras rápidas, precisión en el itinerario o un control preciso para la trayectoria de vuelo. Se incluye en la categoría combate aire-aire y ataque a tierra, armamento de liberación/entrega, rescate aéreo, reconocimiento, reabastecimiento en vuelo (receptor), seguimiento en tierra, explorador antisubmarino y formación cerrada de vuelo.
Categoría B	Fases de vuelo no terminal que son normalmente acopladas usando maniobras gradualmente y sin precisión del itinerario, aunque se requiere precisión en el control de trayectoria vuelo. Se incluye en la categoría el ascenso, crucero, carreteo, abastecimiento en vuelo (cisterna), seguimiento en tierra, descenso, descenso de emergencia, estado de emergencia y planeador.

Fase de vuelo terminal:

Categoría C	Fase de vuelo terminal que es normalmente acoplada usando maniobras gradualmente y usualmente requiere precisión en el control de trayectoria de vuelo. Se incluye en esta categoría el despegue, despegue por catapulta, acercamiento, wave-off/go-around y aterrizaje.
-------------	--

Tabla 4-2 Categorías de fases de vuelo.

Clasificación de las aeronaves

Clase I	Pequeñas, aeronaves livianas, tales como utilitarios ligeros, entrenamientos primarios y de observación ligera.
Clase II	Peso medio, aeronaves de media o baja maniobrabilidad, tales como utilitarios/búsqueda y rescate pesados, transportadores/cargueros/cisterna medios o ligero, bombarderos tácticos, entrenadores y de ataque pesado para clase II.
Clase III	Grandes, pesados, aeronaves de media y baja maniobrabilidad, tales como transportadores/cargueros/cisterna pesados, bombarderos y de entrenamiento para clase III.
Clase IV	Aeronaves de alta maniobrabilidad, tales como combate/interceptores, ataque, reconocimiento táctico, observación y entrenamiento para clase IV.

Tabla 4-3 Clasificación de las aeronaves.

Longitudinal flying qualities

Phugoid mode				
Level 1		$\zeta > 0.04$		
Level 2		$\zeta > 0$		
Level 3		$T_2 > 55 \text{ s}$		
Short-period mode				
Categories A & C			Category B	
Level	ζ_{sp} min	ζ_{sp} max	ζ_{sp} min	ζ_{sp} max
1	0.35	1.30	0.3	2.0
2	0.25	2.00	0.2	2.0
3	0.15	—	0.15	—

Tabla 4-4 Calidad de vuelo para el movimiento longitudinal para ambos modos.

Para el modelo que se tomó para el desarrollo de este proyecto, el aeromodelo VelociRaptor Long-EZ, teniendo en cuenta lo anteriormente demostrado, su calidad de vuelo con respecto al movimiento longitudinal para cada uno de sus modos y su respectivo factor de amortiguamiento es:

- Calidad de vuelo longitudinal para modo fugoide:

Para el movimiento longitudinal en modo fugoide, conociendo ya su factor de amortiguamiento,

$$\zeta_p = 0,064282435,$$

Y con respecto a lo suministrado en la tabla 4-4, vamos a tener una calidad de vuelo de Nivel 1, el cual nos dice que: la calidad de vuelo es claramente adecuada para la misión de fase de vuelo; en conclusión, tendremos una buena calidad de vuelo para el modo fugoide.

- Calidad de vuelo longitudinal para modo periodo-corto:

Para el movimiento longitudinal en modo periodo-corto, conociendo ya su factor de amortiguamiento,

$$\zeta_{sp} = 0,191491194$$

Y teniendo en cuenta que tenemos una fase de vuelo no terminal de categoría B, ya que para el desarrollo del proyecto se tomó la misión de vuelo en crucero, y con lo suministrado en la tabla 4-4, tendremos una calidad de vuelo Nivel 2, el cual nos dice: la calidad de vuelo es adecuada para llevar a cabo la misión de fase de vuelo, pero se esperaría en ocasiones que el piloto se esfuerce al maniobrar o una atenuación en la efectividad de la misión, o ambas; en conclusión, tendremos una aceptable calidad de vuelo y al mismo tiempo cuando se presente una perturbación el piloto o el control de vuelo debe compensar este error.

5 Conclusiones.

El objetivo principal del proyecto consiste en determinar la estabilidad dinámica de un UAS para una aeronave tipo canard para el movimiento de cabeceo o modo longitudinal. Para lograr obtener las gráficas de respuesta a la dinámica de la aeronave, que es nuestro objetivo principal, en la metodología de trabajo se plantearon una serie de objetivos específicos.

El primero de ellos fue desarrollar el modelo matemático del movimiento longitudinal del UAS, a partir de las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento físico del sistema, lógicamente para el caso estudiado que es el de un vuelo recto y nivelado. Una vez obtenidas estas ecuaciones, se establecen las incógnitas a calcular para proceder con nuestro objetivo inicial, las derivadas de estabilidad.

Desde este punto se inició un estudio en el comportamiento de la aeronave en cuanto a su estabilidad estática, para así llegar a las ecuaciones que nos permitieron obtener el cálculo de las derivadas de estabilidad y posteriormente el comportamiento de este mismo respecto a su estabilidad dinámica, con resultados satisfactorios. De lo anterior se dedujo que si una aeronave es estáticamente estable, instantáneamente se asume que la aeronave también es dinámicamente estable.

Por último, para la elaboración de las gráficas de la respuesta de la dinámica longitudinal del UAS se llegó a la función de transferencia, la cual nos describió su comportamiento a un impulso o a una ráfaga de viento con respecto al tiempo.

6 Recomendaciones

Desarrollar las gráficas de respuesta con respecto a la estabilidad dinámica longitudinal del UAS a través de pruebas de vuelo, para así corroborar los resultados analíticos obtenidos a lo largo de nuestro proyecto investigativo.

Determinar las gráficas de respuesta para la estabilidad dinámica latero-direccional del UAS y de igual manera llegar a determinar las funciones de transferencia del mismo, para así posteriormente diseñar un sistema de control automático que permita al UAS una autonomía con respecto a un plan de vuelo o a una misión, o un sistema de radio control.

Bibliografía.

ABZUG, Malcolm J.; LARRABEE, E. Eugene. *Airplane stability and control: a history of the technologies that made aviation possible*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-80992-4.

AFBCA, Air Force Test Pilot School Edwards. *USAF Test Pilot School. Flying Qualities Textbook*, Volume 2, Part 1.

AUSTIN, Reg. *Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment*. First edition, John Wiley & Sons Ltd. United Kingdom, 2010. ISBN 978-0-470-05819-0.

COOK, Michael. *Flight Dynamics Principles, Second ed.*, ed. ELSEIVER Ltda. Oxford, United Kingdom. 2007.

ESCOBEDO ALVA, Jonathan Omega. “*Análisis Dinámico de Prototipos Aerodinámicos de Ala Fija y Rotativa*”. 2012. Tesis Doctoral.

ETKIN, Bernard; REID, Lloyd Duff. *Dynamics of flight: stability and control*. New York: Wiley, 1996.

FINK, R.D. *USAF Stability and Control Datcom*, USAF, 1976.

GRACEY, William. “*The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes by a Simplified Compound-Pendulum Method*”. NACA Technical Note N° 1629. Langley Memorial Aeronautical Laboratory Langley Field, Va. 1948.

HULL, David G. *Fundamentals of airplane flight mechanics*. Springer; Austin, Texas, 2007.

MCRUER, Duane T.; GRAHAM, Dunstan; ASHKENAS, Irving. *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton University Press, 1972.

NELSON, R. C. *Flight Stability and Automatic Control, 2-nd Ed.* McGraw-Hill, New York, 1996.

PAMADI, B.N. *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes*. Second ed., ed. V. Reston, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston VA, 2004.

PAPAGEORGIU, Evangelos C. *“Development of a Dynamic Model for a UAV”*. Naval PostgraduateSchool Monterey Ca, 1997.

PLAZA ALONSO, Elías. “Desarrollo de estrategias de control avanzado para vehículos aéreos no tripulados”, *proyecto fin de carrera*. Sevilla, España: Universidad de Sevilla. 2011.

ROSKAM, JAN.: *Methods for estimating stability and control derivatives of conventional subsonic airplanes*. Lawrence, Kansas, EE.UU: University of Kansas. 1971.

ROVIRA, Oscar Vila. *“Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink”*. 2011. Tesis Doctoral.

Anexos

Anexo A- Cálculos de áreas y cuerdas medias del ala y del canard:

- Área alar y localización de la cuerda media aerodinámica del ala:

$$Area_{Trapezio} = \frac{(B + b)h}{2};$$

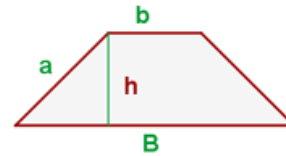


Figura A-1 Área de un trapecio regular

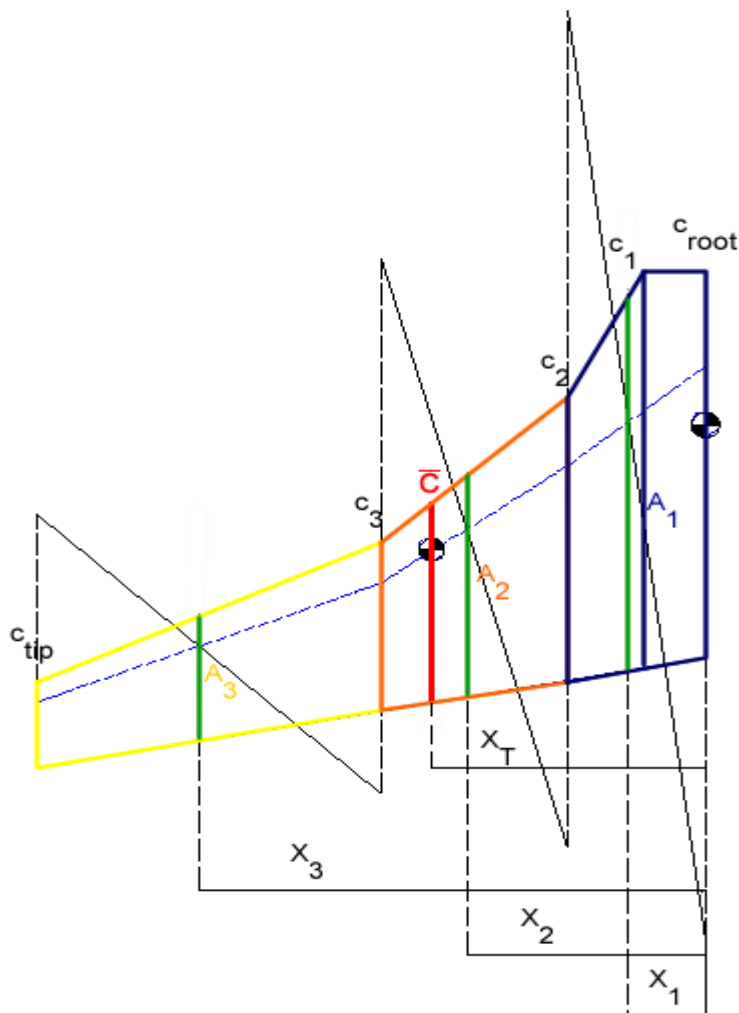


Figura A-2 Localización de la cuerda media alar.

$$A_a = \frac{(36,4 + 37,4)cm * 5,5cm}{2} \Rightarrow A_a = 202,95 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \frac{(37,4 + 26,7)cm * 6,3cm}{2} \Rightarrow A_b = 201,915 \text{ cm}^2$$

$$A_{1Ala} = A_a + A_b \Rightarrow A_{1Ala} = 404,865 \text{ cm}^2$$

$$A_{2Ala} = \frac{(26,7 + 15,8)cm * 15,24cm}{2} \Rightarrow A_{2Ala} = 323,85 \text{ cm}^2$$

$$A_{3Ala} = \frac{(15,8 + 7,9)cm * 28,3cm}{2} \Rightarrow A_{3Ala} = 335,355 \text{ cm}^2$$

$$A_{SemiAla} = A_{1Ala} + A_{2Ala} + A_{3Ala} \Rightarrow A_{TotalAla} = 1064,07 \text{ cm}^2 = 0,106407 \text{ m}^2$$

$$A_{TotalAla} = 2 * A_{SemiAla} \Rightarrow A_{TotalAla} = 2128,14 \text{ cm}^2 = 0,212814 \text{ m}^2$$

$$X_{TAla} = \frac{(X_1 A_{1Ala}) + (X_2 A_{2Ala}) + (X_3 A_{3Ala})}{A_{1Ala} + A_{2Ala} + A_{3Ala}}$$

$$X_1 = 11,4 \text{ cm}$$

$$X_2 = 20,8 \text{ cm}$$

$$X_3 = 31 \text{ cm}$$

$$X_{TAla} = \frac{(11,4 * 404,865)cm^3 + (20,8 * 323,85)cm^3 + (31 * 335,355)cm^3}{1064,07 \text{ cm}^2}$$

$$X_{TAla} = 20,438 \text{ cm} = 0,20438 \text{ m}$$

$$\bar{c}_{Ala} = 19,36 \text{ cm} = 0,1936 \text{ m} ; \text{Dato tomado desde el plano.}$$

- Área del canard y localización de la cuerda media aerodinámica del canard:

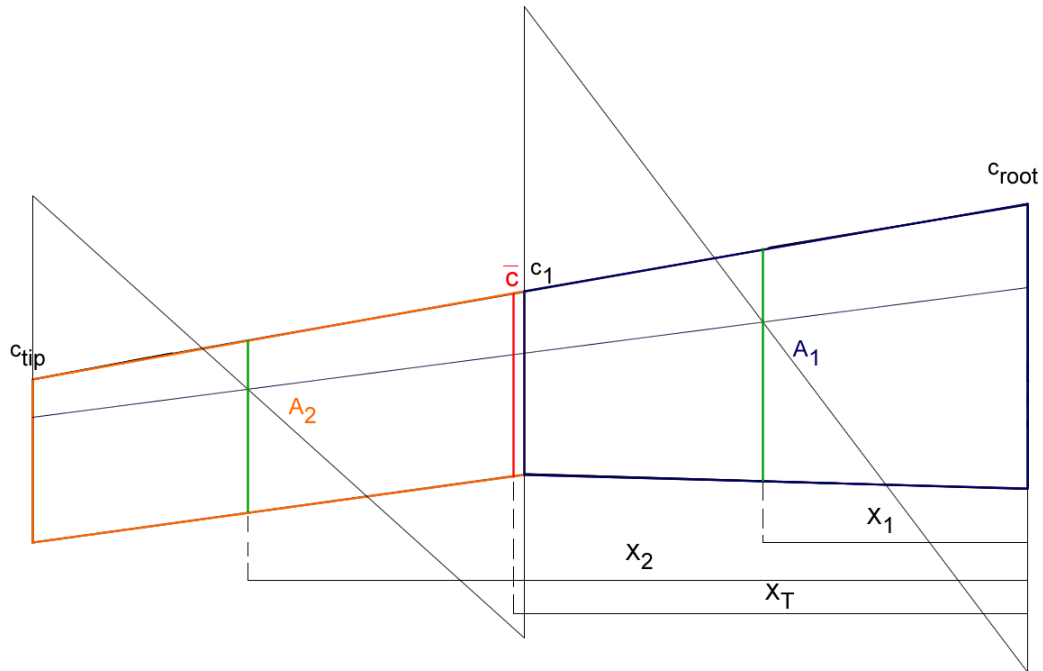


Figura A-3 Localización de la cuerda media del canard.

$$A_{1Canard} = \frac{(8,4 + 5,4)cm * 13,6cm}{2} \Rightarrow A_{1Canard} = 93,84 cm^2$$

$$A_{2Canard} = \frac{(5,4 + 4,8)cm * 13,4cm}{2} \Rightarrow A_{2Canard} = 68,34 cm^2$$

$$A_{SemiCanard} = A_{1Canard} + A_{2Canard} \Rightarrow A_{SemiCanard} = 162,18 cm^2 = 0,016218 m^2$$

$$A_{TotalCanard} = 2 * A_{SemiCanard} \Rightarrow A_{TotalCanard} = 324,36 cm^2 = 0,032436 m^2$$

$$X_{TCanard} = \frac{(X_1 A_{1Canard}) + (X_2 A_{2Canard})}{A_{1Ala} + A_{2Ala}}$$

$$X_1 = 9,6 cm$$

$$X_2 = 21,4 cm$$

$$X_{TCanard} = \frac{(9,6 * 93,84)cm^3 + (21,4 * 68,34)cm^3}{162,18 cm^2}$$

$$X_{T_{Canard}} = 14,572 \text{ cm} = 0,14572 \text{ m}$$

$$\bar{c}_{Canard} = 5,45 \text{ cm} = 0,0545 \text{ m} ; \text{Dato tomado desde el plano.}$$

Anexo B- Calculo del momento de inercia de la aeronave:

Para la fórmula:

$$I_V = \frac{WLT^2}{4\pi^2} - \left(\frac{w}{g} + V\rho + M_A \right) l^2 - I_G$$

Los siguientes datos son usados para el cálculo del momento de inercia de la aeronave:

- $w = 1,5 \text{ kg}$
- $w' = 0,025 \text{ kg}$
- $W = (w + w') = 1,525 \text{ kg}$
- $l = 0,91 \text{ m}$
- $L = 0,96 \text{ m}$
- $T = 1,98912 \text{ seg.}$
- $V\rho = 0,011750844 \text{ kg}$
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ Aceleración por gravedad.
- $M_A = 0 \text{ kg}$
- $I_G = 0,02304 \text{ kg} * \text{m}^2$

Y para el valor variable, en este caso es el momento de inercia virtual de la aeronave, $[I_V]$:

$$I_V = 0,306116396 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Anexo C - Calculo de datos aerodinámicos para el ala y canard:

1. Aspect Ratio:

1.1. Ala:

$$AR_w = \frac{b_w^2}{S_w}$$

$$\Rightarrow AR_w = 5,685716165$$

1.2. Canard:

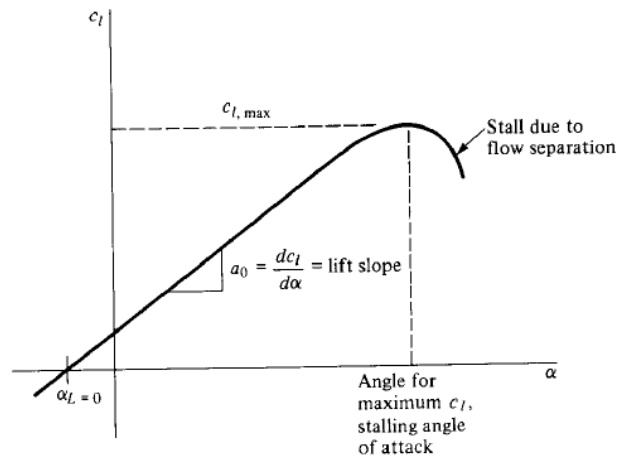
$$AR_c = 8,990011099$$

2. Eficiencia de Oswald:

$$e = 4,61(1 - 0,045AR_w^{0,68})(\cos \Lambda_{LE_w})^{0,15} - 3$$

$$\Rightarrow e = 0,759661117$$

3. Pendiente Coeficiente de Sustentación:



Grafica C-0.1 Pendiente del coeficiente de sustentación con respecto al ángulo de ataque.

3.1. Perfil Alar NACA 2410:

$$\text{lift slope} = \frac{dC_L}{d\alpha} = C_{L_{\alpha_{AFW}}} = 5,8728174 \text{ } 1/\text{rad}$$

3.2. Ala:

$$C_{L\alpha_w} = \frac{C_{L\alpha_{AFw}}}{1 + \frac{C_{L\alpha_{AFw}}}{\pi AR_w e}}$$

$$C_{L\alpha_w} = 4,098827357 \text{ } 1/rad$$

3.3. Perfil Canard NACA 65₁-412:

$$C_{L\alpha_{AFc}} = 5,729577951 \text{ } 1/rad$$

3.4. Canard:

$$C_{L\alpha_c} = \frac{C_{l\alpha_{AFc}}}{1 + \frac{C_{l\alpha_{AFc}}}{\pi AR_w e}}$$

$$C_{L\alpha_c} = 4,521982405 \text{ } 1/rad$$

4. Coeficiente de momento alrededor del centro aerodinámico:
De la grafica C_m vs. α para el perfil NACA 2410:

$$\Rightarrow C_{m_{ac}} = -0,048$$

5. Coeficiente de Sustentación:

5.1. Ala:

$$C_{L_w} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho u^2 S_w}$$

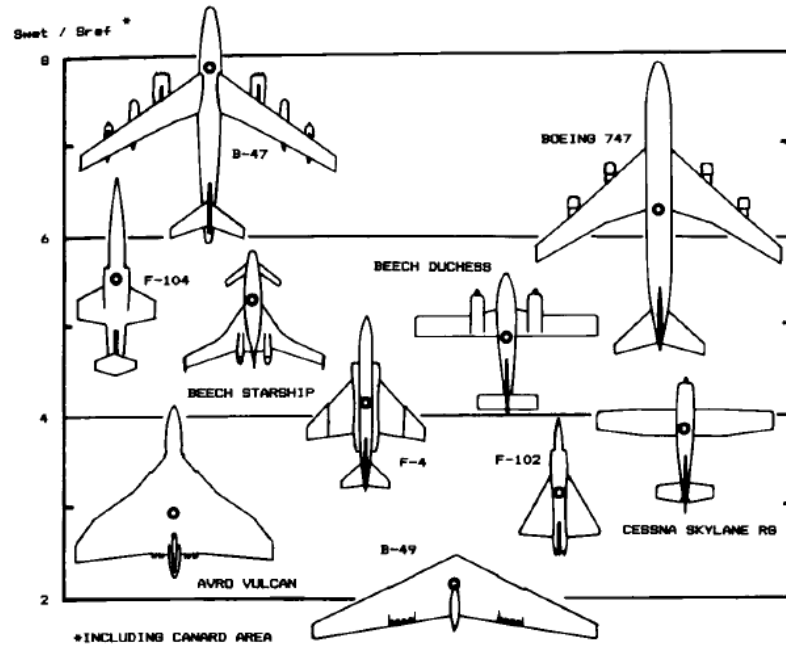
$$C_{L_w} = 0,390223306$$

5.2. Canard:

$$C_{L_c} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho u^2 S_c}$$

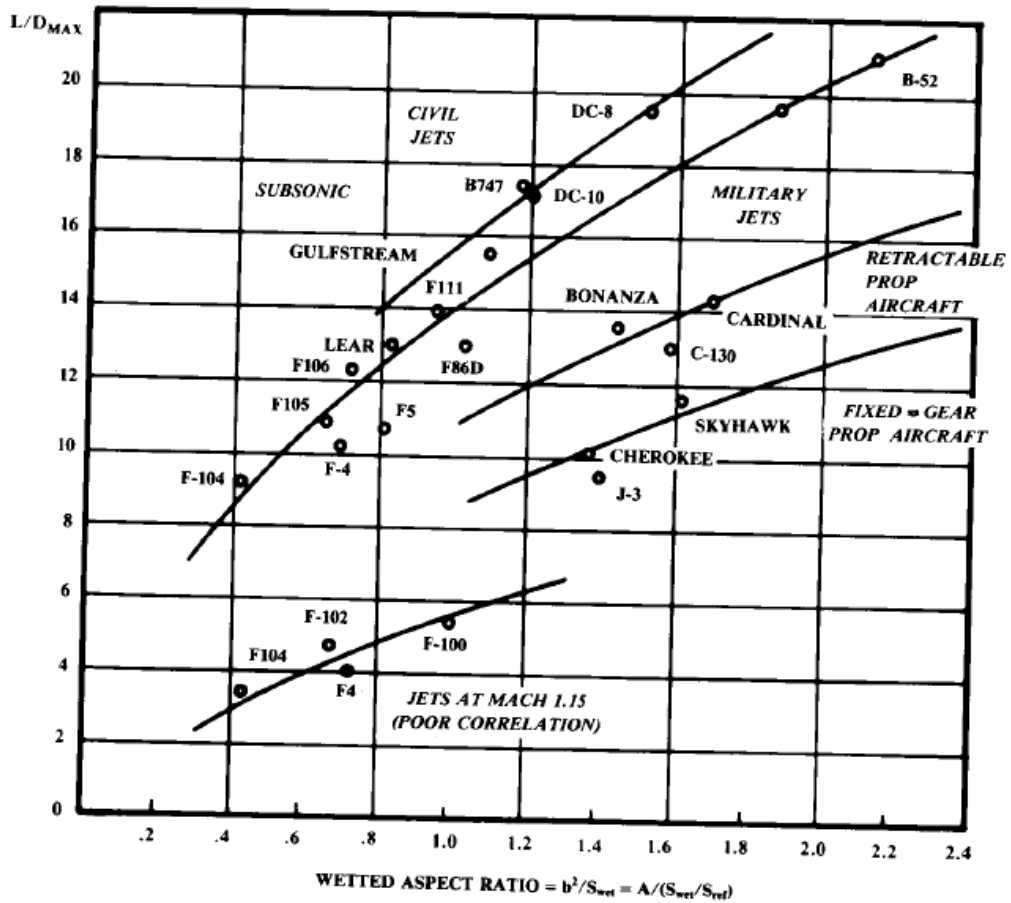
$$C_{L_c} = 2,560272003$$

6. Relación Sustentación Arrastre:
Referencia Raymer capítulo 3:



Grafica C-0.2 Relación área húmeda con respecto al área de referencia.

Para aeronaves canard, la relación $\frac{S_{wet}}{S_{ref}} = 5,3;$



Grafica C-0.3 Máxima relación sustentación arrastre.

$$WETTED ASPECT RATIO = \frac{AR_w}{\frac{S_{wet}}{S_{ref}}} = 1,072776635, \text{ entonces:}$$

$$L/D_{max} = 11$$

7. Coeficiente de Arrastre:

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

$$\Rightarrow C_D = C_L \frac{D}{L}$$

7.1. Ala:

$$C_{D_w} = C_{L_w} \frac{D}{L}$$

$$C_{D_w} = 0,035474846$$

7.2. Canard:

$$C_{D_c} = C_{L_c} \frac{D}{L}$$

$$C_{D_c} = 0,232752$$

8. Coeficiente de sustentación 0:

De la gráfica NACA 2410:

$$\alpha_{0_{L_w}} = -1 \text{ grados} = -0,034906585 \text{ rad}$$

Entonces:

$$C_{L_{0_w}} = C_{L_{\alpha_w}} |\alpha_{0_{L_w}}|$$

$$C_{L_{0_w}} = 0,143076066$$

9. Coeficiente de Arrastre Parasito:

$$C_{D_0} = C_D - \frac{C_L^2}{\pi A Re}$$

$$C_{D_0} = 0,024252815$$

10. Coeficiente de Sustentación Respecto al Angulo de ataque:

11.

$$K_{WB} = 1 - 0,25 \left(\frac{d_f}{b_w} \right)^2 + 0,025 \left(\frac{d_f}{b_w} \right)$$

$$C_{L_{\alpha_{WB}}} = K_{WB} C_{L_{\alpha_w}}$$

$$C_{L_{\alpha}} = C_{L_{\alpha_{WB}}} + C_{L_{\alpha_c}} \eta V_H \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right)$$

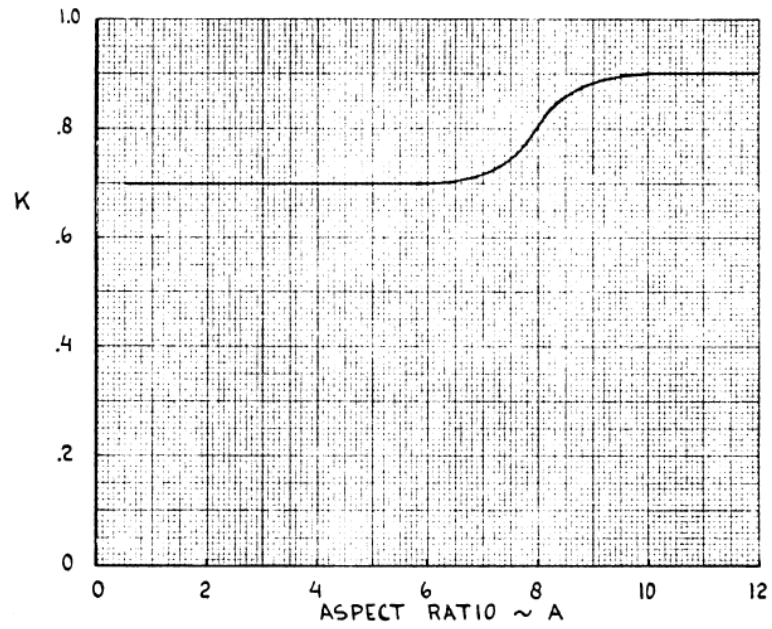
$$C_{L_{\alpha}} = 6,385508365$$

12. Factor de Corrección de Compresibilidad:

$$B = \sqrt{1 - M^2 \cos(\Lambda_{c/4})}$$

$$B = 0,998678704$$

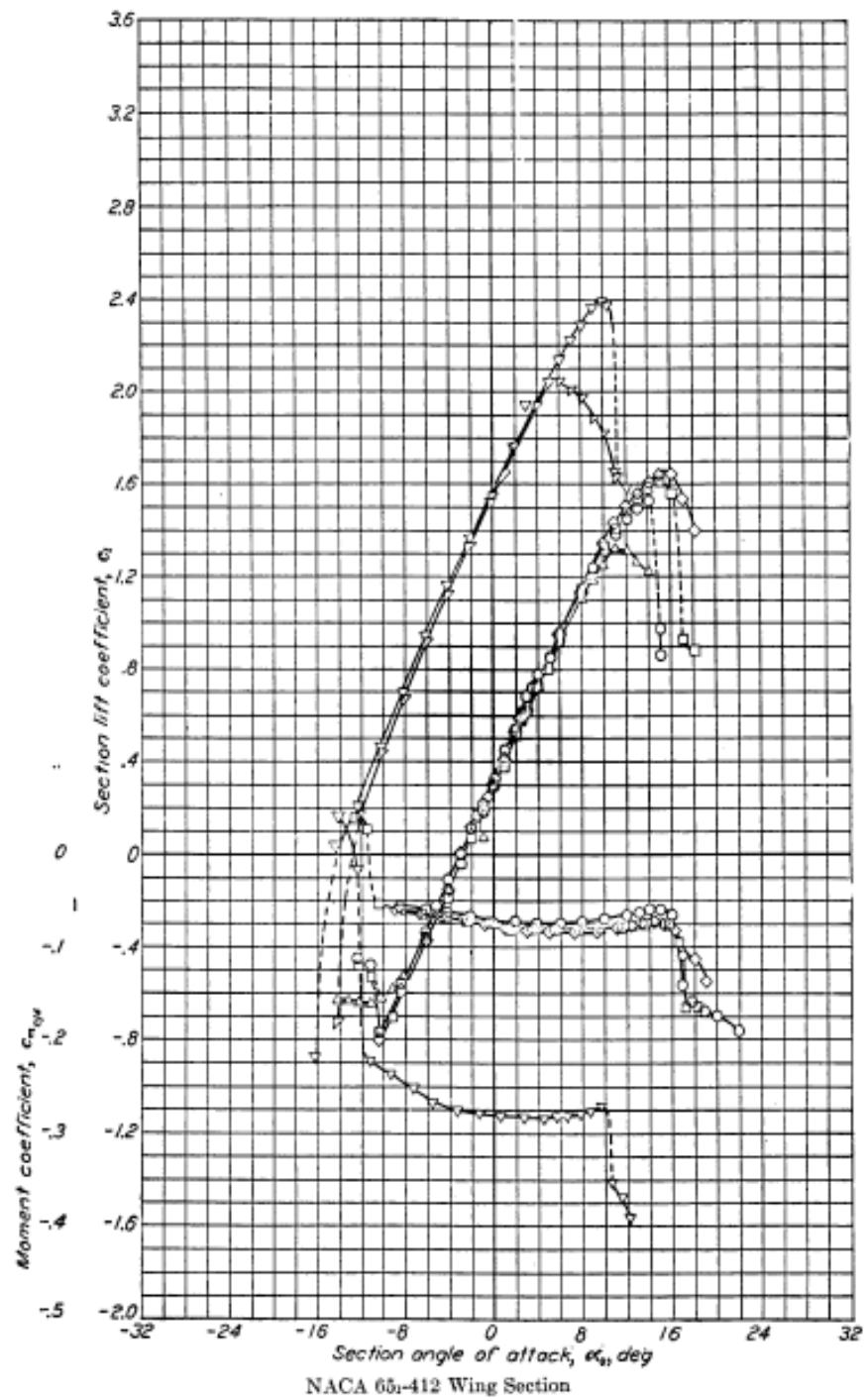
13. Factor de Corrección de Amortiguamiento:



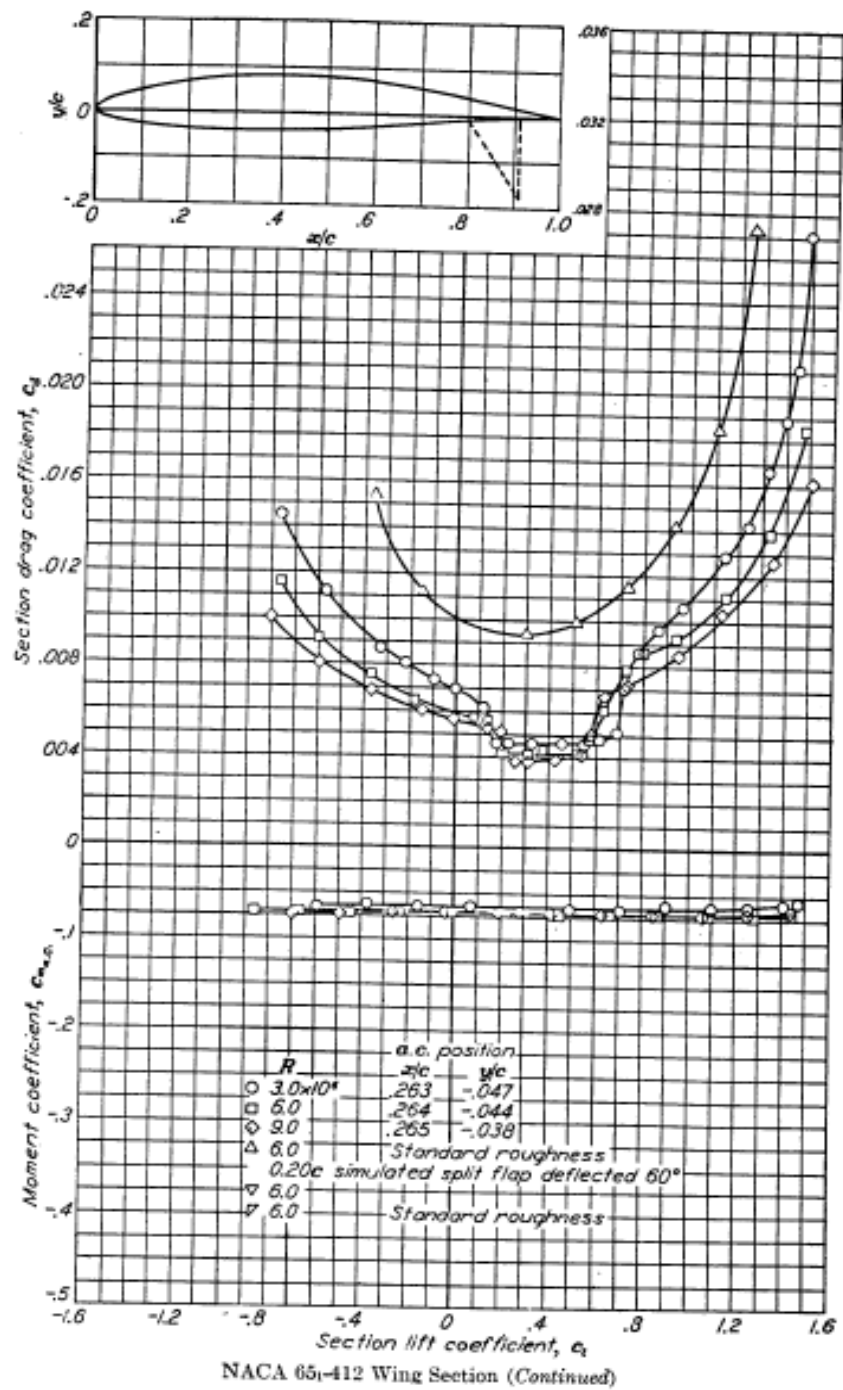
Grafica C-0.4 Factor de corrección de amortiguamiento de la contribución del ala a C_{m_q}

Para $AR_w = 5,685716165$, el factor de corrección de amortiguamiento es de:

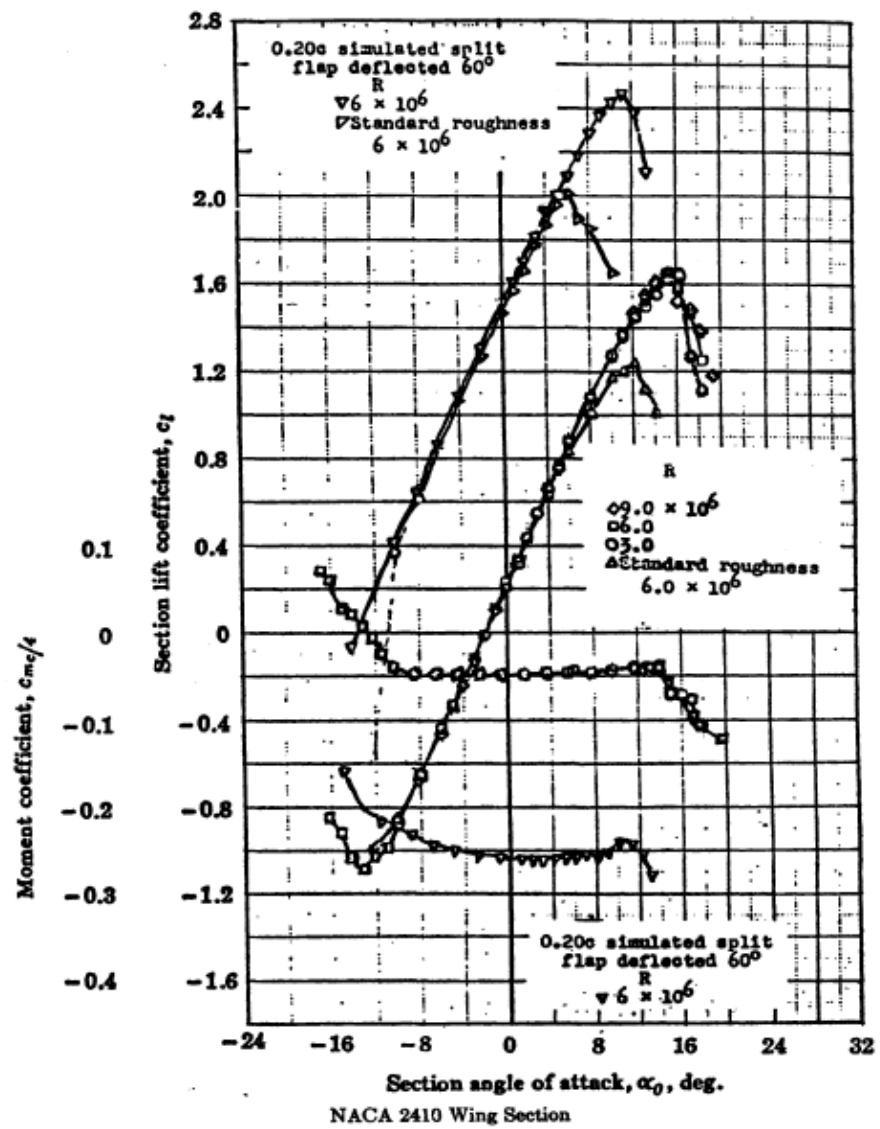
$$K = 0,7$$



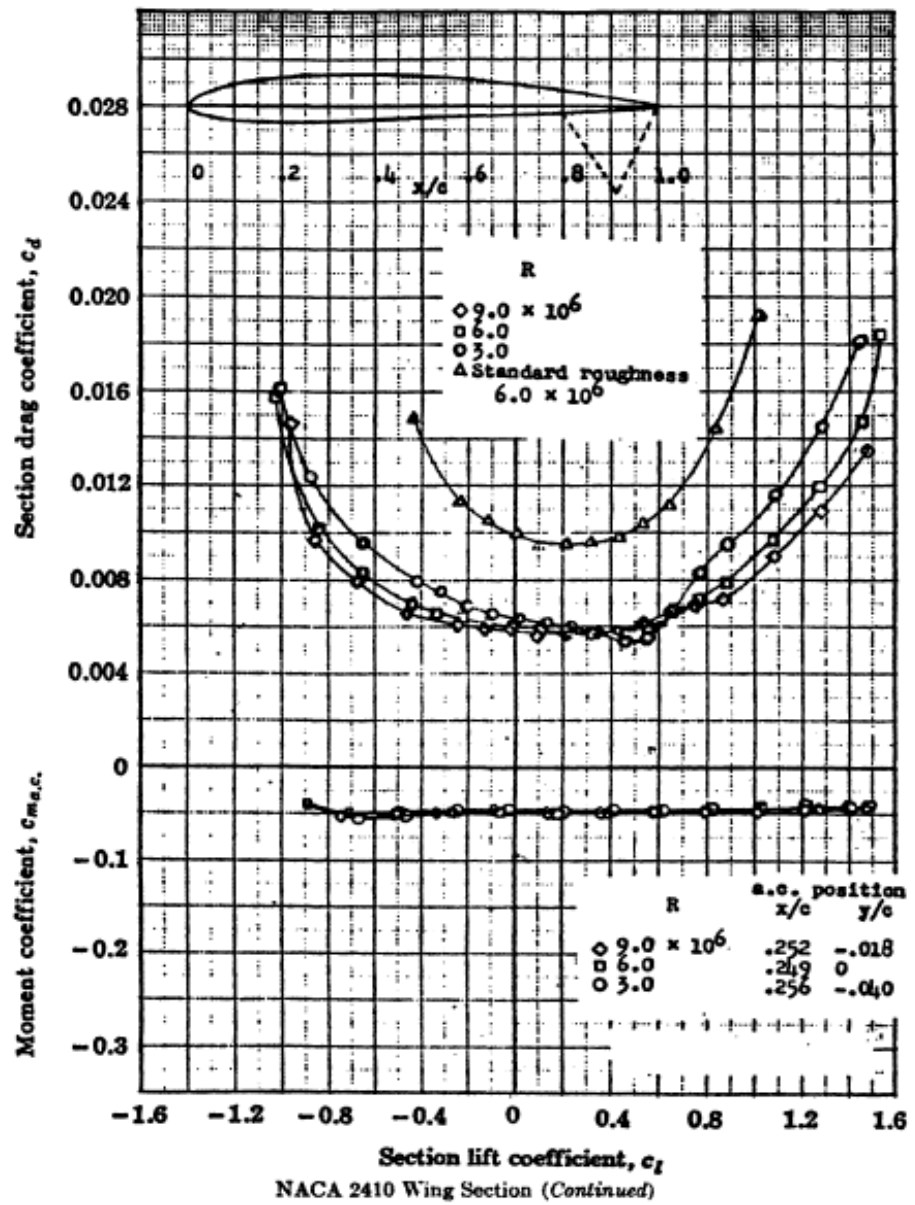
Grafica C-0.5 Coeficiente de sustentación VS Angulo de ataque, perfil NACA 65-412.



Grafica C-0.6 Coeficiente de momento VS Angulo de ataque, perfil NACA 65-412.



Grafica C-0.7 Coeficiente de sustentación VS Angulo de ataque, perfil NACA 2410.



Grafica C-0.8 Coeficiente de momento VS Angulo de ataque, perfil NACA 2410.